۴

میدان الکتروستاتیک در محیط‌های دی‌الکتریک

دی‌الکتریک کامل ماده‌ای است که بار آزاد نداشته باشد ولی در هر صورت مولکولهای آن یقیناً تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی قرار می‌گیرند. به گونه‌ای که قسمتهای مثبت و منفی هر مولکول از مواضع حالت تعادل خود خارج و در دو جهت مخالف جابه‌جا می‌شوند. تأثیر کلی از لحاظ ماکروسکوپی را می‌توان این طور تجسم کرد که تمامی بار مثبت دی‌الکتریک نسبت به بار منفی آن جابه‌جا شده است، در این حالت گفته می‌شود دی‌الکتریک قطبیده شده است. دی‌الکتریک قطبیده با وجود اینکه به طور متوسط خنثاست، ولی در نقاط داخل و خارج خود میدان الکتریکی تولید می‌کند. در واقع قطبش دی‌الکتریک به میدان الکتریکی کل موجود در محیط بستگی دارد، در حالی که قسمتی از این میدان به وسیلهٔ خود دی‌الکتریک ایجاد می‌شود.

قطبش

رفتار الکتروستاتیکی یک محیط دی‌الکتریک به کمک گشتاور دوقطبی در واحد حجم، یا قطبش آن مشخص می‌شود:

$$\vec{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta V} \qquad (۱-۴)$$

ابعاد $\vec{P}$، بار بر واحد سطح و یکای آن در دستگاه mks، کولن بر مترمربع است.

$\vec{P}(x,y,z)$ کمیتی برداری است که در هر جزء حجم، با $\Delta\vec{P}$ هم‌جهت است که $\Delta\vec{P}$ با جهت جابه‌جایی بار مثبت نسبت به بار منفی، هم‌جهت است.

گشتاور دوقطبی الکتریکی یک تک مولکول، $\vec{P}_m$، به صورت زیر ست:

$$\vec{P}_m=\int_{\text{مولکول}}\vec{r}\,dq \qquad (۲-۴)$$

یدان خارجی یک محیط دی‌الکتریک

انسیل ناشی از قطعه‌ای متناهی از یک مادهٔ دی‌الکتریک قطبیده در هر نقطهٔ r' با قطبش $P(r')$ مشخص می‌شود، به صورت زیر ت:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S_0}\frac{\sigma_p\,da'}{|r-r'|}+\int_{V_0}\frac{\rho_p\,dv'}{|r-r'|}\right] \qquad (۳-$$

که در آن

$$\sigma_p=\vec{P}.\hat{n}=P_n \qquad (۴-۴)$$

$$\rho_p=-\vec{\nabla}.\vec{P} \qquad (۵-۴)$$

دو تابع نرده‌ای هستند که از بردار قطبش $\vec{P}$ نتیجه می‌شوند، چگالی‌های قطبشی نامیده می‌شوند. σ_p چگالی سطحی بار قطبشی است که دارای بُعد بار الکتریکی در واحد سطح است و از آن مؤلفهٔ قطبش به دست می‌آید که بر سطح عمود است. ρ_p چگالی حجمی بار قطبشی است که دارای بُعد بار الکتریکی در واحد حجم است و از نایکنواختی قطبش در داخل ماده ناشی می‌شود. در واقع مقدار کل بار قطبشی یک جسم دی‌الکتریک به صورت زیر است:

$$Q_p=\int_{V_0}(-\vec{\nabla}'.\vec{P})\,dV'+\oint_{S_0}\vec{P}.\hat{n}\,da' \qquad (۶-۴)$$

با توجه به قانون دیورژانس $Q_p=0$ می‌شود که با فرض اولیهٔ ما که دی‌الکتریک از لحاظ الکتریکی خنثاست، در تطابق است.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ را می‌توان از روی منفی گرادیان معادلهٔ (۴-۳) بدست آورد:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S_0}\sigma_p\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}da'+\int_{V_0}\rho_p\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'\right] \qquad (۷-۴)$$

میدان الکتریکی در داخل یک دی‌الکتریک

معادلهٔ (۴-۳)، اعم از اینکه نقطهٔ r در داخل دی‌الکتریک واقع باشد و یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(r)$ را به دست می‌دهد و همچنین معادلهٔ (۴-۷)، خواه $\vec{r}$ در داخل دی‌الکتریک باشد یا در خارج آن، میدان الکتریکی ناشی از محیط را در نقطهٔ $\vec{r}$ تعیین می‌کند.

قانون گاوس در دی‌الکتریکها: جابه‌جایی الکتریکی

قانون گاوس برای ناحیه‌ای که دارای بارهای جاداده شده در دی‌الکتریک است، به صورت زیر است:

$$\oint\vec{E}.\hat{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q+Q_p) \qquad (۸-۴)$$

که Q_p، بار قطبشی در سطح S است و Q مقدار باری که جاداده شده در سطح گاوسی مفروض است.

Physicsclass.blogsky.com

اگر Q_p را بر حسب بردار قطبش به صورت زیر بنویسیم:

(۴-۹)

$$Q_p=-\oint_s \vec{P}.\hat{n}da$$

می‌توان قانون گاوس را به شکل زیر بیان کرد:

(۴-۱۰)

$$\oint_s (\varepsilon_\circ \vec{E}+\vec{P}).\hat{n}da=Q$$

که Q فقط مقدار بار جاداده شده در دی‌الکتریک است.و با استفاده از بردار میدان ماکروسکوپی $\vec{D}$ (جابه‌جایی الکتریکی):

(۴-۱۱)

$$\vec{D}=\varepsilon_\circ \vec{E}+\vec{P}$$

قانون گاوس به صورت زیر بیان می‌شود:

(۴-۱۲)

$$\oint_s \vec{D}.\hat{n}da=Q$$

و صورت دیفرانسیلی قانون گائوس با استفاده از این بردار $\vec{D}$:

(۴-۱۳)

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho$$

پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی‌الکتریک

درجهٔ قطبش یک مادهٔ دی‌الکتریک نه تنها به میدان الکتریکی، بلکه به خواص مولکولهای سازندهٔ آن بستگی دارد. از لحاظ ماکروسکوپی، رفتار ماده با یک رابطهٔ تجربی به نام معادلهٔ ساختمندی، $\vec{P}=\vec{P}(\vec{E})$، مشخص می‌شود. این رابطه یک رابطهٔ نقطه‌ای است و اگر $\vec{E}$ در ماده در نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کند، $\vec{P}$ هم به تبعیت از آن تغییر می‌کند. اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی را داشته باشد که میدان الکتریکی مواد آن دارد:

(۴-۱۴)

$$\vec{P}=\chi(\vec{E})\vec{E}$$

که کمیت نرده‌ای $\chi(\vec{E})$ پذیرفتاری الکتریکی ماده نام دارد. بنابراین بردار $\vec{D}$ در یک محیط همسانگرد به صورت زیر است:

(۴-۱۵)

$$\vec{D}=\varepsilon(\vec{E})\vec{E}$$

که $\varepsilon(\vec{E})$، گذردهی ماده نامیده می‌شود:

(۴-۱۶)

$$\varepsilon(\vec{E})=\varepsilon_\circ+\chi(\vec{E})$$

در دی‌الکتریکهای خطی، x و ε ثابتهای مشخصهٔ ماده هستند. در واقع از روابط زیر تبعیت می‌کنند:

(۴-۱۷)

$$\vec{P}=\chi\vec{E}$$

(۴-۱۸)

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

اگر میدان الکتریکی در یک دی‌الکتریک را خیلی قوی کنیم، این میدان الکترونها را به طور کامل از مولکولها بیرون می‌کشد و ماده به رسانا تبدیل می‌شود. حداکثر میدان الکتریکی که یک دی‌الکتریک می‌تواند تحمل کند بی‌آنکه در هم بشکند، استقامت دی‌الکتریک E_{max} نامیده می‌شود.

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در یک شاره دی‌الکتریک

بار نقطه‌ای q در یک شارهٔ دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک در مبدأ مختصات قرار داشته باشد، با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی $\vec{E}$ و قطبش به صورت زیر بدست می‌آید:

(۴-۱۹)

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi k\varepsilon_\circ r^3}\vec{r} \quad , \quad \vec{P}=\frac{(k-1)q}{4\pi k r^3}\vec{r}$$

در واقع میدان الکتریکی در مقایسه با حالتی که محیط دی‌الکتریک وجود ندارد، به نسبت ضریب k کوچک می‌شود.

شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

بردارهای میدان $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در عبور از فصل مشترک دو محیط به صورت زیر تغییر می‌کنند:

(۴-۲۰)

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$$

در واقع ناپیوستگی مؤلفهٔ عمود $\vec{D}$ با چگالی سطحی بار خارجی در روی فصل مشترک مشخص می‌شود به عبارت دیگر، اگر باری بر روی فصل مشترک بین دو محیط وجود نداشته باشد، مؤلفهٔ عمود $\vec{D}$ پیوسته است.

مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی در عبور از فصل مشترک پیوسته است:

(۴-۲۱)

$$E_{2t}=E_{1t}$$

و بنابه دلایل فیزیکی محض، پتانسیل φ در عبور از فصل مشترک دو محیط باید پیوسته باشد.

نکته: شار $\vec{D}$ در ناحیه‌هایی از فضا که در آن بار خارجی وجود ندارد، پیوسته است.

(۴-۲۲)

$$\oint \vec{D}.\hat{n}da=Q$$

بنابراین خطوط جابه‌جایی به بارهای خارجی منتهی می‌شود. ولی خطوط نیرو یا به بارهای خارجی ختم می‌شوند و یا به بارهای قطبشی.

مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی‌الکتریکها

اگر دی‌الکتریکهای که با آنها سروکار داریم، خطی، همسانگرد دو همگن باشند، آنگاه شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت زیر در می‌آید:

(۴-۲۳)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

و با استفاده از $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$ برای میدان الکتروستاتیکی، معادلهٔ پواسون برای پتانسیل در دی‌الکتریک حاصل می‌شود:

(۴-۲۴)

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

تفاوت بین این رابطه و معادلهٔ پواسون در خلاء:

$\varepsilon_\circ$ (خلأ) $\rightarrow \varepsilon$

ρ (کل بار) $\rightarrow \rho$ (چگالی بار خارجی)

در بیشتر موارد، دی‌الکتریک شامل باری که در حجم آن توزیع شده باشد، نیست، یعنی $\rho=\circ$. در واقع بارها بر سطوح رساناها قرار دارند و یا به صورت بارهای نقطه‌ای در داخل دی‌الکتریک جا داده شده‌اند. تحت این شرایط، در سراسر حجم دی‌الکتریک، پتانسیل در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند:

(۴-۲۵)

$$\nabla^2\varphi=\circ$$

روش تصویری برای مسائل شامل دی‌الکتریکها:

همانطور که در فصل (۳) بیان شد، پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا توسط پتانسیل بارهای نقطه‌ای و رساناهای باردار شده داخل ناحیه و توسط بارهای تصویری فرضی بیرون ناحیه تولید می‌شود. بارهای

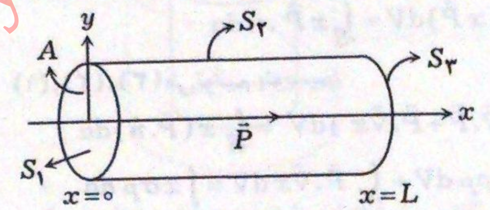
Physicsclass.blogsky.com

تصویری به نظر می‌آید داخل یک یا چند رسانا قرار گرفته‌اند. ولی وقتی دو یا چند دی‌الکتریک موجود باشد، می‌توان بارهای تصویری خیالی را داخل یکی از دی‌الکتریکهای دیگر (نه آنکه پتانسیل برای آن محاسبه می‌شود) در نظر گرفت و شرایط مرزی در هر فصل مشترک دی‌الکتریک ـ دی‌الکتریک باید ارضا شود.

مسائل فصل چهارم

۴-۱- یک میلهٔ دی‌الکتریک باریک که سطح مقطع آن A است، روی محور x از $x=0$ تا $x=L$ قرار دارد. قطبش میله در امتداد طول آن با رابطهٔ $P_x = ax^2+b$ داده می‌شود. (الف) چگالی حجمی بار قطبش و چگالی سطحی بار قطبشی را در هر یک از دو سر میله حساب کنید. (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبش کل در این حالت صفر است.

حل: الف)



$$\vec{P} = P_x\,\hat{i} = (ax^2+b)\,\hat{i}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -2ax$$

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P_1} = \vec{P}\cdot\hat{n}\big|_{x=0} = \vec{P}\cdot(-\hat{i})\big|_{x=0} \\ \quad = -(ax^2+b)\big|_{x=0} = -b \\ \sigma_{P_3} = \vec{P}\cdot\hat{n}_3\big|_{x=L} = \vec{P}\cdot(\hat{i})\big|_{x=L} \\ \quad = ax^2+b\big|_{x=L} = aL^2+b \\ \sigma_{P_2} = \vec{P}\cdot\hat{n}_2 = \vec{P}\cdot\hat{r} = 0 \end{cases}$$

ب)

$$dQ_P = \sigma_P\,da + \rho_P\,dV \quad\Rightarrow\quad Q_P = \int \sigma_P\,da + \int \rho_P\,dV$$

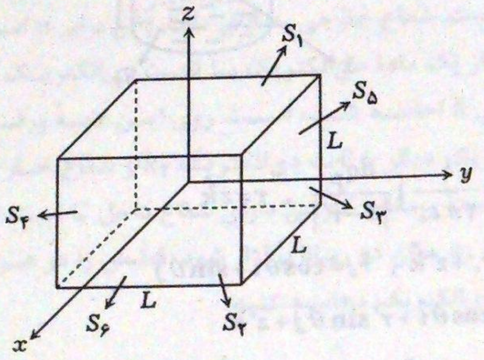
$$Q_P = \int \sigma_{P_1}\,da_1 + \int \sigma_{P_2}\,da_2 + \int \sigma_{P_3}\,da_3 + \int \rho_P\,dV$$

$$= -bA + 0 + (aL^2+b)A + \int_{x=0}^{x=L} (-2ax)\,A\,dx$$

$$= aL^2A + \left(-2aA\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=L}\right) = aL^2A - aL^2A = 0$$

۴-۲- یک مکعب دی‌الکتریک به ضلع L دارای قطبشی شعاعی به صورت $\vec{P} = A\vec{r}$ است، که در آن A یک ضریب ثابت و $\vec{r} = \hat{i}x + y\hat{j} + z\hat{k}$ است. مبدأ مختصات در مرکز مکعب است. (الف) همهٔ چگالیهای بار قطبشی را محاسبه کنید و (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبشی کل صفر است.

حل: الف)



$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\vec{\nabla}\cdot(A\vec{r}) = -A\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = -3A$$

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{P_1} = \vec{P}\cdot\hat{n}_1\big|_{z=\frac{L}{2}} = A\vec{r}\cdot\hat{k}\big|_{z=\frac{L}{2}} \\ \quad = AZ\big|_{z=\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \\ \sigma_{P_2} = \vec{P}\cdot\hat{n}_2\big|_{z=-\frac{L}{2}} = A\vec{r}\cdot\hat{k}\big|_{z=-\frac{L}{2}} \\ \quad = -AZ\big|_{z=-\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \\ \sigma_{P_3} = \vec{P}\cdot\hat{n}_3\big|_{y=\frac{L}{2}} = A\vec{r}\cdot\hat{j}\big|_{z=\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \\ \sigma_{P_4} = \vec{P}\cdot\hat{n}_4\big|_{y=-\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \\ \sigma_{P_5} = \vec{P}\cdot\hat{n}_5\big|_{x=-\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \\ \sigma_{s_6} = \vec{P}\cdot\hat{n}_6\big|_{x=\frac{L}{2}} = \dfrac{AL}{2} \end{cases}$$

ب)

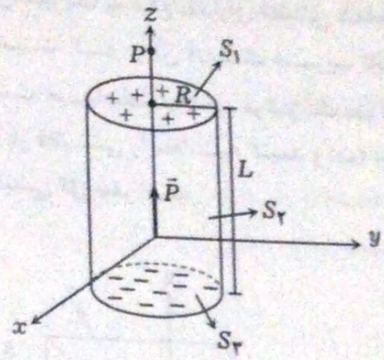
$$dQ_P = \sigma_P\,da + \rho_P\,dV \Rightarrow Q_P = \int \sigma_P\,da + \int \rho_P\,dV$$

$$Q_P = \left(\frac{AL}{2}\right)(6L^2) + (-3A)(L^3) = 3AL^3 - 3AL^3 = 0$$

۴-۳- میلهٔ دی‌الکتریک استوانه‌ای شکل قائمی به طول L و به شعاع R در امتداد طولش قطبیده شده است. اگر قطبش یکنواخت و بزرگی آن P باشد، میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را در نقطه‌ای بر روی محور میله حساب کنید.

Physicsclass.blogsky.com

حل:



$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'_P}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ ,\ r=z\hat{k}\ ,$$

$$\vec{r}'=r'\hat{r}_0+z'\hat{k}\ ,\ \hat{r}_0=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{r}'=r'\cos\theta\hat{i}+r'\sin\theta\hat{j}+z'\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'|=\left[r'^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$dq'_P=\sigma'_P\,da+\rho'_P\,dV$$

$$\vec{P}=P\hat{k}\ \Rightarrow\ \rho'_P=-\vec{\nabla}.\vec{P}=0$$

$$\sigma_P=\vec{P}.\hat{n}$$

$$\sigma'_{P_1}=\vec{P}.\hat{n}_1\Big|_{z=\frac{L}{2}}=P \qquad \sigma'_{P_2}=\vec{P}.\hat{n}_2=0$$

$$\sigma'_{P_3}=\vec{P}.\hat{n}_3\Big|_{z=-\frac{L}{2}}=-P$$

بنابراین پتانسیل به صورت زیر است:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\sigma'_P\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{S_1}\frac{P\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\int\frac{-P\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r'dr'd\theta'}{\left[r'^2+(z-\frac{L}{2})^2\right]^{\frac{1}{2}}}-\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r'dr'd\theta'}{\left[r'^2+(z+\frac{L}{2})^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\left[\left(r'^2+(z-\frac{L}{2})^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R-\left(r'^2+(z+\frac{L}{2})^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R\right]$$

$$=\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+(z-\frac{L}{2})^2}-\sqrt{(z-\frac{L}{2})^2}-\sqrt{R^2+(z+\frac{L}{2})^2}+\sqrt{(z+\frac{L}{2})^2}\right]$$

$$=\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+(z-\frac{L}{2})^2}-\left|z-\frac{L}{2}\right|-\sqrt{R^2+(z+\frac{L}{2})^2}+\left|z+\frac{L}{2}\right|\right]$$

برای حالت $z>\frac{L}{2}$، پتانسیل و میدان الکتریکی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi=\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+(z-\frac{L}{2})^2}-\sqrt{R^2+(z+\frac{L}{2})^2}+L\right]$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=\frac{-P\hat{k}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2(z-\frac{L}{2})}{2\sqrt{R^2+(z-\frac{L}{2})^2}}-\frac{(z+\frac{L}{2})}{\sqrt{R^2+(z+\frac{L}{2})^2}}\right]$$

۴-۴- نشان دهید که در یک جسم دی‌الکتریک به حجم V و سطح خارجی s رابطهٔ زیر میان قطبش $\vec{P}$ و چگالیهای بار قطبشی σ_P، ρ_P برقرار است.

$$\int_V\vec{P}dV=\int_V\rho_P\,\vec{r}\,dV+\int_s\sigma_P\,\vec{r}\,da$$

در اینجا $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$، بردار مکان از هر مبدأ مختصات ثابتی است [راهنمایی: $\vec{\nabla}.(x\vec{P})$ را طبق معادلهٔ (۴-۱۰) بسط دهید.]

حل: ابتدا اثبات را برای مؤلفهٔ دکارتی x انجام می‌دهیم و بعد به مؤلفه‌های دیگر تعمیم می‌دهیم:

$$\vec{\nabla}.(x\vec{P})=x\vec{\nabla}.\vec{P}+\vec{P}.\vec{\nabla}x \qquad (1)$$

$$\rho_P=-\vec{\nabla}.\vec{P} \qquad (2)$$

$$\sigma_P=\vec{P}.\hat{n} \qquad (3)$$

از قضیهٔ واگرایی داریم که:

$$\int_V\vec{\nabla}.(x\vec{P})dV=\int_S x\vec{P}.\hat{n}\,da$$

با توجه به رابطهٔ (۱)،(۲)،(۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_V(x\vec{\nabla}.\vec{P}+\vec{P}.\vec{\nabla}x)dV=\int_S x(\vec{P}.\hat{n})da$$

$$\int_V -x\rho_P\,dV+\int_V\vec{P}.\vec{\nabla}x\,dV=\int x\sigma_P\,da$$

$$\int_V(P_x-x\rho_P)dV=\int_S x\sigma_P\,da$$

به همین ترتیب برای مؤلفه‌های y و z داریم:

$$\int_V(P_y-y\rho_P)dV=\int_S y\sigma_P\,da$$

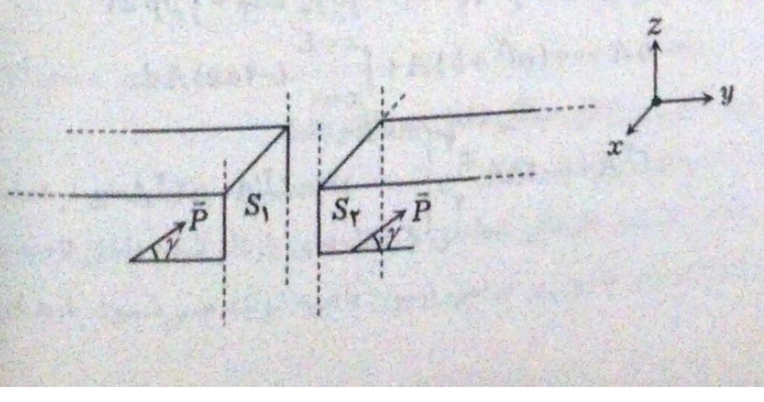
$$\int_V(P_z-z\rho_P)dV=\int_S z\sigma_P\,da$$

بنابراین از جمع سه رابطهٔ اخیر داریم:

$$\int_V\vec{P}dV=\int\rho_P\,\vec{r}\,dV+\int\vec{r}\,\sigma_P\,da$$

۴-۵- دو قطعهٔ دی‌الکتریک نیم‌متناهی را تقریباً در وضع تماس قرار داده‌ایم، به طوری که میان آنها شکاف باریکی با فاصلهٔ ثابت وجود دارد. قطبش $\vec{P}$ در سراسر قطعه‌ها مقداری است ثابت و بابردار عمود بر سطوحی که شکاف میان دو قطعه را در بر می‌گیرند، زاویهٔ γ می‌سازد. میدان الکتریکی را در شکاف میان دو قطعه حساب کنید.

حل:



Physicsclass.blogsky.com

چون بردار $\vec{P}$ در سراسر قطعه‌ها مقداری ثابت است، بنابراین:

$$\rho_P=-\vec{\nabla}.\vec{P}=0$$

$$\rho_P=\vec{P}.\hat{n} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_{P_1}=\vec{P}.\hat{j}=P\cos\gamma\\ \sigma_{P_2}=\vec{P}.(-\hat{j})=-P\cos\gamma\end{cases}$$

و می‌دانیم که میدان الکتریکی نزدیک یک صفحهٔ نامتناهی دی‌الکتریک با چگالی σ برابر است با:

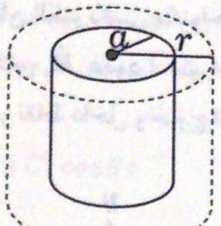
$$E=\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

بنابراین میدان میان دو صفحهٔ نامتناهی دی‌الکتریک S_1 و S_2 با چگالی سطحی σ_{P_1} و σ_{P_2} برابر است با:

$$\vec{E}=\frac{\sigma_{P_1}}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_{P_2}}{2\varepsilon_0}(-\hat{j})=\frac{P\cos\gamma}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{-P\cos\gamma}{2\varepsilon_0}(-\hat{j})$$
$$=\frac{2P\cos\gamma}{2\varepsilon_0}\hat{j}=\frac{P\cos\gamma}{\varepsilon_0}\hat{j}$$

۴-۶- یک رسانای استوانه‌ای طویل به شعاع a را که بار الکتریکی در واحد طول آن λ است، در یک محیط دی‌الکتریک با گذردهی ثابت ε قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در فاصلهٔ $r>a$ از محور استوانه محاسبه کنید؟

حل:



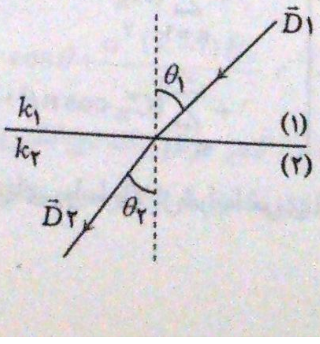
یک سطح گاوسی استوانه‌ای با شعاع $r>a$ در نظر می‌گیریم. بدلیل طول طویل استوانه، جابه‌جایی الکتریکی تابعی از z نیست و مؤلفه‌ای در این راستا ندارد، و همچنین بدلیل تقارن استوانه‌ای حاکم جابه‌جایی الکتریکی $\vec{D}$ تابعی از ϕ نیست و مؤلفه‌ای در این راستا ندارد، در واقع $\vec{D}$ فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند.

$$\oint_S \vec{D}.\hat{n}\,da=Q \Rightarrow D(2\pi rL)=\lambda L \Rightarrow D=\frac{\lambda}{2\pi r}\hat{r}_0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{r}_0 \qquad (r>a)$$

۴-۷- دو محیط دی‌الکتریک با ثابتهای دی‌الکتریک k_1 و k_2 با فصل مشترک تختی از یکدیگر جدا شده‌اند. فصل مشترک آنها بار خارجی ندارد. رابطهٔ میان زاویای θ_1 و θ_2، که زاویای میان یک خط اختیاری جابه‌جایی و خط عمود بر فصل مشترک‌اند، پیدا کنید: θ_1 در محیط ۱ و θ_2 در محیط ۲.

حل:



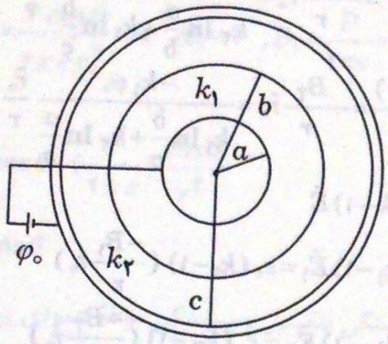
$$\left.\begin{matrix}D_{2n}-D_{1n}=\sigma\\ \sigma=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow D_{2n}=D_{1n} \Rightarrow D_2\cos\theta_2=D_1\cos\theta_1 \quad (1)$$

$$E_{2t}=E_{1t} \Rightarrow \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}=\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} \Rightarrow \varepsilon_1 D_2\sin\theta_2=\varepsilon_2 D_1\sin\theta_1 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \varepsilon_1\tan\theta_2=\varepsilon_2\tan\theta_1$$

۴-۸- یک کابل هم محور با مقطع دایره‌ای دارای یک دی‌الکتریک مرکب است، شعاع خارجی رسانای داخلی آن برابر a است، که با ورقه‌ای از یک مادهٔ دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k_1 و شعاع خارجی b احاطه شده است. روی این لایه ورقه‌ای از یک دی‌الکتریک دیگر با ثابت دی‌الکتریک k_2 و شعاع خارجی C قرار دارد. پوستهٔ رسانای خارجی دارای شعاع داخل C است. اگر اختلاف پتانسیل φ_0 میان دو رسانا برقرار شود، قطبش را در هر نقطه از دو محیط دی‌الکتریک محاسبه کنید.

حل:



به دلیل تقارن استوانه‌ای حاکم φ فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، در واقع $\varphi=\varphi(r)$ است، بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}\varphi=\varphi(r)\\ q=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \nabla^2\varphi(r)=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \Rightarrow r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{B}{r} \Rightarrow \varphi(r)=B\ln r+A$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\varphi_1(r)=A_1+B_1\ln r & a<r<b \quad (1)\\ \varphi_2(r)=A_2+B_2\ln r & b<r<c \quad (2)\end{cases}$$

برای بدست آوردن ثابتهای A_1, B_1, A_2, B_2، شرط مرزی حاکم بر مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\varphi_1(r=a)-\varphi_2(r=c)=\varphi_0$$
$$\Rightarrow (A_1+B_1\ln a)-(A_2+B_2\ln c)=\varphi_0$$
$$\Rightarrow (A_1-A_2)+(B_1\ln a-B_2\ln c)=\varphi_0 \quad (3)$$

شرط پیوستگی پتانسیل در مرز میان دو محیط:

$$\varphi_1(r=b)=\varphi_2(r=b) \Rightarrow A_1+B_1\ln b=A_2+B_2\ln b$$
$$\Rightarrow A_1-A_2=B_2\ln b-B_1\ln b \quad (4)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$B_2\ln b-B_1\ln b+B_1\ln a-B_2\ln c=\varphi_0$$
$$\Rightarrow B_2\ln\frac{b}{c}+B_1\ln\frac{a}{b}=\varphi_0 \quad (5)$$

چون باری در فصل مشترک دو محیط نیست، بنابراین مؤلفهٔ عمودی بردار $\vec{D}$ پیوسته است:

Physicsclass.blogsky.com

$$D_{1n}(r=b)=D_{2n}(r=b)$$

$$\Rightarrow k_1\varepsilon_0\left(\frac{-\partial\varphi_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=b}=k_2\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=b}$$

$$k_1\frac{B_1}{b}=k_2\frac{B_2}{b}\Rightarrow k_1B_1=k_2B_2 \quad (۶)$$

از روابط (۵) و (۶) داریم:

$$B_1=\frac{\varphi_0}{\ln\frac{a}{b}+\frac{k_1}{k_2}.\ln\frac{b}{c}}\ ,\quad B_2=\frac{\varphi_0}{\ln\frac{b}{c}+\frac{k_2}{k_1}.\ln\frac{a}{c}}$$

بنابراین:

$$\varphi_1(r)=A_1+\frac{k_2\varphi_0}{k_2 Ln\frac{a}{b}+k_1\ln\frac{b}{c}}\ln r$$

$$\varphi_2(r)=A_2+\frac{k_1\varphi_0}{k_1 Ln\frac{b}{c}+k_2\ln\frac{a}{b}}\ln r$$

$$\vec{E}_1=-\frac{\partial\varphi_1(r)}{\partial r}=-\frac{B_1}{r}\hat{r}_0=\frac{-k_2\varphi_0}{k_2\ln\frac{a}{b}+k_1\ln\frac{b}{c}}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r}_0$$

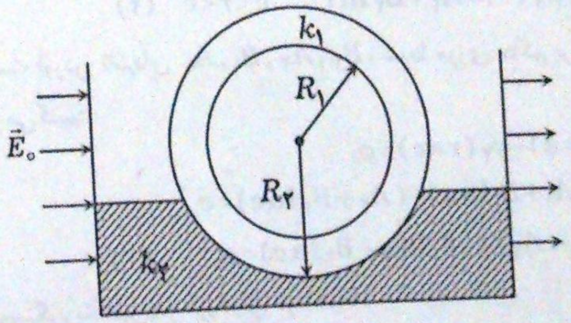
$$\vec{E}_2=-\frac{\partial\varphi_2(r)}{\partial r}=-\frac{B_2}{r}\hat{r}_0=\frac{-k_1\varphi_0}{k_1\ln\frac{b}{c}+k_2\ln\frac{a}{b}}\frac{\hat{r}_0}{r}$$

$$\vec{P}=\chi\vec{E}=\varepsilon_0(k-1)\vec{E}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}_1=\varepsilon_0(k_1-1)\vec{E}_1=\varepsilon_0(k_1-1)\left(\frac{-B_1}{r}\hat{r}_0\right)\\ \vec{P}_2=\varepsilon_0(k_2-1)\vec{E}_2=\varepsilon_0(k_2-1)\left(\frac{-B_2}{r}\hat{r}_0\right)\end{cases}$$

۴-۹- یک رسانای کروی به شعاع R_1 توسط پوستهٔ کروی دی‌الکتریک k جامدی با شعاع خارجی R_2، شعاع داخلی R_1 و ثابت دی‌الکتریک k_1 احاطه شده است. این جسم مرکب در سیالی با ثابت دی‌الکتریک k_2 فرو برده شده و تحت تأثیر یک میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت E_0 قرار گرفته است. میدان الکتریکی را در دو محیط دی‌الکتریک به دست آورید.

حل:



با توجه به تقارن سمتی مسئله، پتانسیل $\varphi(r,\theta)$ را با استفاده از هماهنگهای منطقه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$$

و با توجه به شرایط مرزی مسئله $[\varphi_1(r=R_2)=\varphi_2(r=R_2),\ \varphi(r\to\infty)=-E-Z]$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\varphi_1(r,\theta)=(Ar+Br^{-2})\cos\theta\\ \varphi_2(r,\theta)=(-E_0r+Cr^{-2})\cos\theta\end{cases}$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت از شرایط مرزی مسئله استفاده می‌کنیم:

$$E_{1t}(r,R_1)=0\Rightarrow\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\Big|_{r=R_1}=0\Rightarrow AR_1+BR_1^{-2}=0$$

$$\Rightarrow AR_1^3=-B \quad (۱)$$

$$\varphi_1(r=R_2)=\varphi_2(r=R_2)\Rightarrow AR_2+BR_2^{-2}=-E_0R_2+CR_2^{-2}$$

$$\Rightarrow (A+E_0)R_2^3=B+C \quad (۲)$$

$$\sigma=0\Rightarrow D_{1r}(r=R_2)=D_{2r}(r=R_2)\Rightarrow k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=k_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$$

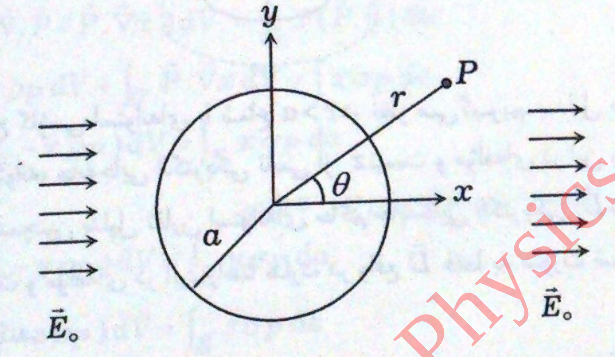
$$\Rightarrow k_1(A-2BR_2^{-3})=k_2(-E_0-2CR_2^{-3})$$

$$\Rightarrow AR_2^3-2B=\frac{k_2}{k_1}(-E_0R_2^3-2C) \quad (۳)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) و (۳) ضرایب A و B و C به دست آمده و φ_1 و φ_2 و در نتیجه میدان الکتریکی در دو ناحیه حاصل می‌شود.

۴-۱۰- یک دی‌الکتریک استوانه‌ای طویل به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک K در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار داده شده است. محور استوانه بر راستای $\vec{E}_0$ عمود است. استوانه بار خارجی ندارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج استوانه بدست آورید.

حل:



بدلیل طویل بودن استوانه، پتانسیل تابعی از z نیست و چون $q=0$ است، با استفاده از هماهنگهای استوانه‌ای معادلهٔ لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{in}(r,\theta)=A_0+B_0\ln r\\ \quad+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n\\ \quad+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)r^{-n}\\ \varphi_{out}(r,\theta)=A'_0+B'_0\ln r\\ \quad+\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta)r^n\\ \quad+\sum_{n=1}^{\infty}(C'_n\cos n\theta+D'_n\sin n\theta)r^{-n}\end{cases}$$

برای بدست آوردن ثابتهای روابط بالا از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

Physicsclass.blogsky.com

بدلیل اینکه استوانه بار خارجی ندارد، بنابراین:

$$B'_0=0$$

و همچنین بدلیل اینکه در $r\to\infty$ ، $\varphi=-E_0 r\cos\theta+\varphi_0$ است، داریم:

$$A'_0=\varphi_0 \ ,\ B'_n=0\ \ \forall n \ ,\ A'_1=-E_0 \ \ A'_n=0 \ \ n>1$$

بنابراین φ_{out} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_{out}=\varphi_0-E_0 r\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(c'_n\cos n\theta+D'_n\sin n\theta)r^{-n}$$

بدلیل اینکه $r\to 0$ نباید $\varphi\to\infty$ باشد، در نتیجه:

$$B_0=0 \ ,\ C_n=0\ \ \forall n \ ,\ D_n=0\ \ \forall n$$

بنابراین φ_{in} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_{in}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^{n}$$

و به دلیل اینکه $\vec E=E_0\hat i$ است، در واقع φ فقط تابعی از x است، بنابراین در φ_{in} ، φ_{out} فقط جملات کسینوسی باقی می‌مانند:

$$\varphi_{out}=\varphi_0-E_0 r\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(C'_n\cos n\theta)r^{-n}$$

$$\varphi_{in}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta)r^{n}$$

و بدلیل شرایط مرزی $\varphi_{in}(r=a)=\varphi_{out}(r=a)$ و همچنین $D_{1n}(r=a)=D_{2n}(r=0)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که جملات شامل $(\cos n\theta, n\geq 2)$ حذف می‌شوند:

$$\varphi_{out}=\varphi_0-E_0 r\cos\theta+C'_1\cos\theta\, r^{-1}$$

$$\varphi_{in}=A_0+A_1\cos\theta\, r$$

$$\varphi_{out}(r=a)=\varphi_{in}(r=a)$$

$$\Rightarrow \varphi_0-E_0 a\cos\theta+C'_1\frac{\cos\theta}{a}=A_0+A_1 a\cos\theta$$

$$\Rightarrow A_0=\varphi_0 \ ,\ A_1=-E_0+\frac{C'_1}{a^2}$$

$$D_{1n}(r=a)=D_{2n}(r=a)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

$$k(-E_0+\frac{C'_1}{a^2})\cos\theta=-E_0\cos\theta-C'_1\cos\theta\, a^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{-2E_0}{k+1} \\ C'_1=\dfrac{a^2(k-1)E_0}{k+1} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=\varphi_0-\frac{2E_0}{k+1}r\cos\theta$$

$$\varphi_{out}=\varphi_0-E_0 r\cos\theta+\frac{a^2(k-1)E_0}{k+1}r^{-1}\cos\theta$$

۴-۱۱- دو قطبی نقطه‌ای $\vec P$ در مرکز یک دی‌الکتریک جامد کروی به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک k قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج کره پیدا کنید. [راهنمایی: میدان در نقاط خارج میدانی دو قطبی است، در داخل، علاوه بر میدان دو قطبی یک جملهٔ دیگر نیز لازم است.]

حل: اگر محور z را در جهت گشتاور دو قطبی بگیریم، جواب معادلهٔ لاپلاس به صورت زیر است:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

چون φ در $r>a$ بر حسب $\cos\theta$ است و به دلیل اعمال شرایط مرزی، باید فقط جملات شامل $\cos\theta$ را نگه می‌داریم ، بنابراین:

$$\varphi_{in}=A_0+\frac{B_0}{r}+A_1 r\cos\theta+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta \qquad r<a$$

$$\varphi_{out}=A'_0+\frac{B'_0}{r}+A'_1 r\cos\theta+\frac{B'_1}{r^2}\cos\theta \qquad r>a$$

چون کره باردار نیست، بنابراین: $B_0=B'_0=0$

$$r\to\infty \quad \varphi_{out}\to 0 \quad A'_0=A'_1=0$$

$$r\to 0 \quad \varphi_{in}=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\Rightarrow A_0=0 \ ,B_1=\frac{P}{4\pi\varepsilon}=\frac{P}{4\pi k\varepsilon_0}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=A_1 r\cos\theta+(\frac{P}{4\pi\varepsilon})\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\varphi_{out}=\frac{B'_1}{r^2}\cos\theta$$

با اعمال شرط پیوستگی پتانسیل و پیوستگی مؤلفهٔ عمودی بردار جابه‌جایی در $(r=a)$ داریم:

$$\varphi_{in}(r=a)=\varphi_{out}(r=a)$$

$$\Rightarrow A_1 a\cos\theta+(\frac{P}{4\pi\varepsilon})\frac{\cos\theta}{a^2}=\frac{B'_1}{a^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow A_1+\frac{P}{4\pi\varepsilon a^3}=\frac{B'_1}{a^3} \qquad (1)$$

$$D_{1n}(r=a)=D_{2n}(r=a)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(-\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r})\bigg|_{r=a}=\varepsilon_0(-\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r})\bigg|_{r=a}$$

$$\varepsilon(A_1-\frac{2P}{4\pi\varepsilon}a^{-3})=-2\varepsilon_0\frac{B'_1}{a^3} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A_1=\frac{2P(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon a^3(\varepsilon+2\varepsilon_0)} \ ,\ B'_1=\frac{3P\varepsilon}{4\pi\varepsilon(\varepsilon+2\varepsilon_0)}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{a^3(\varepsilon+2\varepsilon_0)}r\right]$$

$$\varphi_{out}=\frac{3P\cos\theta}{4\pi(\varepsilon+2\varepsilon_0)}\frac{1}{r^2}$$

۴-۱۲- نشان دهید که پاسخ به دست آمده در بخش (۴-۸)، برای دی‌الکتریک کروی در میدانی که درآغاز یکنواخت است، اگر k به

Physicsclass.blogsky.com

سمت بی‌نهایت میل کند، نتیجه با آنچه در بخش ۳-۵ برای کرهٔ رسانا به دست آمد، یکی است.

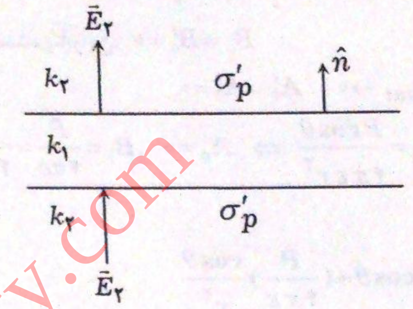
حل: در بخش (۴-۸)، میدان در داخل کره دی‌الکتریک:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_2=\dfrac{3}{k+2}\vec{E}_0\\ k\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{E}_2=0$$

میدان در داخل رسانا صفر است، که با مطالب فصل (۳) مطابقت دارد.

۴-۱۳- بُرهٔ تختی از یک ماده با ثابت دی‌الکتریک k_1 از هر دو طرف توسط ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک k_2 محصور شده است. میدان الکتریکی E_2 در محیط ۲، به صورت یکنواخت و عمود بر مرزها داده شده است. (الف) میدان E_1، (ب) قطبش P_1 و (ج) بار قطبشی را در محیط ۱ پیدا کنید.

حل:



الف) بردار $\vec{E}_2$ بر مرزها عمود است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}E_{2t}=0\\ E_{1t}=E_{2t}\end{array}\right\}\Rightarrow E_{1t}=0$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \quad , \quad \sigma=0 \;\Rightarrow D_{2n}=D_{1n}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 k_2 E_{2n}=\varepsilon_0 k_1 E_{1n}$$

$$\Rightarrow E_{1n}=\frac{k_2}{k_1}E_{2n} \;\Rightarrow\; \vec{E}_1=\frac{k_2}{k_1}\vec{E}_2$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_1=\chi\vec{E}_1=\varepsilon_0(k_1-1)\vec{E}_1\\ \vec{E}_1=\dfrac{k_2}{k_1}\vec{E}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{P}_1=\varepsilon_0(k_1-1)\frac{k_2}{k_1}\vec{E}_2$$

ج)

$$\rho_{P_1}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_1=0$$

$$\sigma_p=\vec{P}_1\cdot\hat{n}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma'_p=\vec{P}_1\cdot\hat{n}=\varepsilon_0(k_1-1)\dfrac{k_2}{k_1}E_2\\ \sigma'_p=\vec{P}_1\cdot(-\hat{n})=-\varepsilon_0(k_1-1)\dfrac{k_2}{k_1}E_2\end{array}\right.$$

۴-۱۴- نشان دهید که اگر در مسئله (۴-۱۳)، k_1 به سمت بی‌نهایت میل کند، نتیجه از لحاظ فیزیکی با معادلهٔ (۴-۴۴) سازگار است.

حل: در قسمت (ب) سؤال (۴-۱۳) بدست آمد:

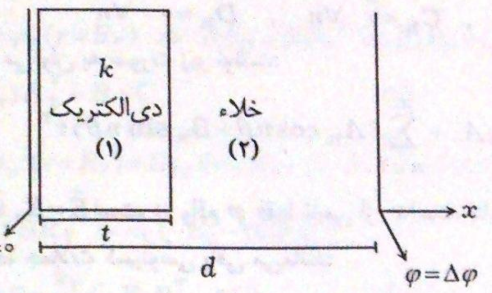
$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_1=\dfrac{k_2}{k_1}\vec{E}_2\\ k_1\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{E}_1=0 \Rightarrow E_{1n}=0 \Rightarrow D_{1n}=0$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \;\Rightarrow D_{2n}=\sigma$$

که این همان معادلهٔ (۴-۴۴) است.

۴-۱۵- دو صفحهٔ رسانای موازی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند، یک بُره از جسم دی‌الکتریکی را که ثابت دی‌الکتریک آن k و ضخامت یکنواخت آن t است $(t<d)$ میان این دو صفحه قرار می‌دهیم. بردارهای میدان $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در دی‌الکتریک و همچنین در خلاء میان دی‌الکتریک و یکی از صفحات را پیدا کنید. از اثرهای لبه که از متناهی بودن صفحات ناشی می‌شود، چشم‌پوشی کنید.

حل:



با توجه به شکل پتانسیل فقط تابعی از x است، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi}{dx}=A \;\Rightarrow\; \varphi=Ax+B$$

$$\varphi=Ax+B\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\varphi_1=A_1x+B_1\\ \varphi_2=A_2x+B_2\end{array}\right.$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\varphi_1(x=0)=0 \;\Rightarrow\; A_1(0)+B_1=0 \Rightarrow B_1=0 \qquad (1)$$

$$\varphi_2(x=d)=\Delta\varphi \;\Rightarrow\; A_2d+B_2=\Delta\varphi \qquad (2)$$

از پیوستگی پتانسیل و مؤلفهٔ عمودی بردار جابه‌جایی در مرز بین خلأ و دی‌الکتریک داریم:

$$\varphi_1(x=t)=\varphi_2(x=t) \;\Rightarrow\; A_1t=A_2t+B_2 \qquad (3)$$

$$\sigma=0 \;\Rightarrow\; D_{1n}=D_{2n}$$

$$\Rightarrow k\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\bigg|_{x=t}=\varepsilon_0\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\bigg|_{x=t}$$

$$\Rightarrow \qquad kA_1=A_2 \quad (4)$$

از سه معادلهٔ (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$$A_1=\frac{\Delta\varphi}{kd-t(k-1)} \qquad A_2=\frac{k\Delta\varphi}{kd-t(k-1)}$$

$$B_2=(A_1-A_2)t$$

بنابراین:

$$\varphi_1=\frac{\Delta\varphi}{kd-t(k-1)}x \quad , \quad \varphi_2=\frac{k\Delta\varphi}{kd-t(k-1)}x+(A_1-A_2)t$$

$$\vec{E}_1=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\hat{i}=\frac{-\Delta\varphi}{kd-t(k-1)}\hat{i} \;\Rightarrow\; \vec{D}_1=\varepsilon\vec{E}_1$$

$$\vec{E}_2=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\hat{i}=\frac{-k\Delta\varphi}{kd-t(k-1)}\hat{i} \;\Rightarrow\; \vec{D}_2=\varepsilon_0\vec{E}_2$$

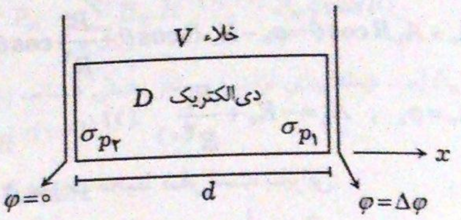
بنابراین $\vec{D}$ در تمامی فضای میان ضخامت تقریباً یکسان است.

۴-۱۶- دو صفحهٔ رسانای موازی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند یک بُره از جسم

Physicsclass.blogsky.com

دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک k و ضخامت d را میان دو صفحه وارد می‌کنیم، اما این بُره حجم میان صفحات را کاملاً پر نمی‌کند. مطلوب است محاسبهٔ میدان الکتریکی: (الف) در دی‌الکتریک، (ب) در ناحیهٔ خلأ میان صفحات، چگالی بار σ را در آن قسمتی از صفحه را پیدا کنید که (ج) بادی‌الکتریک و (د) با خلاء در تماس است. (هـ) σ_P را بر روی سطح بُرهٔ دی‌الکتریک پیدا کنید.

حل:



با توجه به شکل پتانسیل فقط بر حسب x تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi(x)=0 \Rightarrow \varphi=Ax+B \Rightarrow \begin{cases}\varphi_V=A_1x+B_1\\ \varphi_D=A_2x+B_2\end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان ضرایب ثابت را بدست آورند، بنابراین:

$$\varphi_V\big|_{x=0}=\varphi_D\big|_{x=0}=0 \Rightarrow B_1=B_2=0$$

$$\varphi_V\big|_{x=d}=\varphi_D\big|_{x=d}=\Delta\varphi \Rightarrow \begin{cases} A_1 d=\Delta\varphi \Rightarrow \varphi_V=\dfrac{\Delta\varphi}{d}x \\ A_2 d=\Delta\varphi \Rightarrow \varphi_D=\dfrac{\Delta\varphi}{d}x\end{cases}$$

الف)

$$\varphi_D=\frac{\Delta\varphi}{d}x \Rightarrow \vec E_D=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat i=-\frac{\Delta\varphi}{d}\hat i$$

ب)

$$\varphi_V=\frac{\Delta\varphi}{d}x \Rightarrow \vec E_V=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat i=-\frac{\Delta\varphi}{d}\hat i$$

ج)

$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$

میدان در داخل رسانا صفراست $\Rightarrow D_{1n}=0$

$$\Rightarrow D_{2n}=\sigma \Rightarrow k\varepsilon_0 E_D=\sigma \Rightarrow \sigma=-k\varepsilon_0\frac{\Delta\varphi}{d}$$

د)

$$\left.\begin{matrix} D_{2n}-D_{1n}=\sigma \\ D_{1n}=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow D_{2n}=\sigma \Rightarrow \varepsilon_0 E_V=\sigma \Rightarrow \sigma=-\varepsilon_0\frac{\Delta\varphi}{d}$$

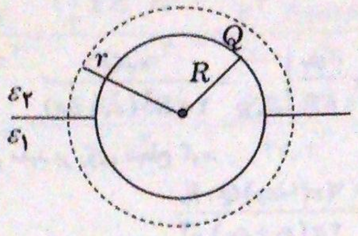
هـ)

$$\vec P=\chi\vec E_D=\varepsilon_0(k-1)(-\frac{\Delta\varphi}{d})\hat i$$

$$\sigma_P=\vec P\cdot\hat n \Rightarrow \begin{cases}\sigma_{P_1}=\vec P\cdot\hat n=\vec P\cdot\hat i=\dfrac{\varepsilon_0(k-1)\Delta\varphi}{d}\\ \sigma_{P_2}=\vec P\cdot\hat n=\vec P\cdot(-\hat i)=\dfrac{-\varepsilon_0(k-1)\Delta\varphi}{d}\end{cases}$$

۴-۱۷- یک کرهٔ رسانا به شعاع R در یک محیط دی‌الکتریک مایع با گذردهی ε_1 تا نیمه غوطه‌ور است. در ناحیهٔ بالای مایع، گازی است با گذردهی ε_2، بار کل بر روی کره Q است. الف) یک میدان الکتریکی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله به دست آورید که در تمام شرایط مرزی صدق کند. چگالی بارهای آزاد، مقید و کل را برای تمام نقاط واقع بر سطح کره پیدا کنید. (ب) نشان دهید که این میدان الکتریکی، میدان واقعی است.

حل:



با توجه به تقارن کروی حاکم، پتانسیل فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi(r)=-\frac{\rho}{\varepsilon}=0 \Rightarrow \nabla^2\varphi(r)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{A}{r^2}$$

$$\varphi(r)=\frac{A}{r}+B \Rightarrow \begin{cases}\varphi_1=\dfrac{A_1}{r}+B_1\\ \varphi_2=\dfrac{A_2}{r}+B_2\end{cases}$$

برای مشخص کردن ثابتهای A و B از شرایط مرزی حاکم استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r\to\infty)=0 \Rightarrow B_1=B_2=0$$

$$\varphi_1(r=R)=\varphi_2(r=R) \Rightarrow \frac{A_1}{R}=\frac{A_2}{R}$$

$$\Rightarrow A_1=A_2 \Rightarrow \varphi_1=\varphi_2=\varphi=\frac{A}{r}$$

قانون گاوس برای بردار جابه‌جائی $\vec D$ (سطح گاوسی یک کره به شعاع r فرض می‌شود) به صورت زیر است:

$$\oint_s \vec D\cdot d\vec s=Q$$

و بردار $\vec D$ برای دو محیط به صورت زیر است:

$$\vec D_1=\varepsilon_1\vec E_1=-\varepsilon_1\vec\nabla\varphi_1=\varepsilon_1\frac{A}{r^2}\hat r_0$$

$$\vec D_2=\varepsilon_2\vec E_2=-\varepsilon_2\vec\nabla\varphi_2=\frac{\varepsilon_2 A}{r^2}\hat r_0$$

بنابراین:

$$\oint_s \vec D\cdot d\vec s=Q \Rightarrow D_1(2\pi r^2)+D_2(2\pi r^2)=Q \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 A(2\pi)+\varepsilon_2 A(2\pi)=Q \Rightarrow A=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

بنابراین پتانسیل و میدان الکتریکی در دو محیط به صورت زیر است:

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{A}{r}=\frac{Q}{2\pi r(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\vec E_1=\vec E_2=-\vec\nabla\varphi=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\hat r_0}{r^2}$$

چگالی بار سطحی آزاد بر روی سطح کره:

$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$, (رسانا) $D_{1n}=0 \Rightarrow D_{2n}=\sigma$

Physicsclass.blogsky.com

بنابراین چگالی بار سطحی آزاد برروی سطح کره در محیط با گذردهی ε_1 برابر است با:

$$\sigma_1 = D_{1n} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

و همچنین چگالی بار سطحی آزاد برروی سطح کره در محیطی با گذردهی ε_2 برابر است با:

$$\sigma_2 = D_{2n} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

چگالی بار سطحی مقید بر روی سطح کره:

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\hat{r}_0}{r^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1\Big|_{r=R} = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{r}) = \frac{-Q(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\hat{r}_0}{r^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2\Big|_{r=R} = \vec{P}_2 \cdot (-\hat{r}) = \frac{-Q(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

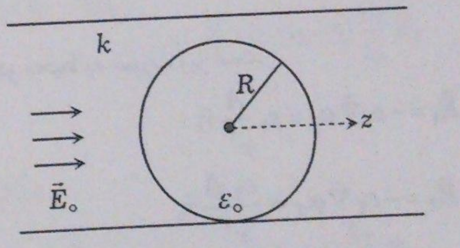
برای بار سطحی کل:

$$\sigma_{totul} = \sigma_P + \sigma_f \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{totul(1)} = \dfrac{\varepsilon_0 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2} \\ \sigma_{totul(2)} = \dfrac{\varepsilon_0 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2} \end{cases}$$

۴-۱۸- میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در محیطی با ثابت دی‌الکتریک k برقرار شده است. ثابت کنید که میدان در حفره‌ای کروی در درون این محیط عبارت است از:

$$E = \frac{3kE_0}{2k+1}$$

حل:



با توجه به تقارن سمتی حاکم، پتانسیل را می‌توان با استفاده از هماهنگهای منطقه‌ای به صورت زیر نوشت:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

برای بدست آوردن ثابتهای A و B در دو ناحیه از شرایط مرزی حاکم استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r\to\infty) = -E_0 r\cos\theta + \varphi_0$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R)$$

بنابراین فقط جملات $\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم. و همچنین:

$$\varphi(r\to 0) \neq \infty$$

بنابراین تمام ضرایب $r^{-(n+1)}$ برای پتانسیل φ_{in} صفر هستند.

$$\varphi_{in} = A_0 + A_1 r\cos\theta$$

$$\varphi_{out} = A'_0 + A'_1 r\cos\theta + \frac{B'_1}{r^2}\cos\theta$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم تا ضرایب را بدست آوریم:

$$\varphi(r\to\infty) = -E_0 r\cos\theta + \varphi_0 \Rightarrow A'_0 = \varphi_0 \ , \ A'_1 = -E_0$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R)$$

$$\Rightarrow A_0 + A_1 R\cos\theta = \varphi_0 - E_0 R\cos\theta + \frac{B'_1}{R^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow A_0 = \varphi_0 \ , \ A_1 = -E_0 + \frac{B'_1}{R^3} \quad (1)$$

چگالی بار سطحی در مرز دو محیط صفر است، بنابراین:

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

$$\varepsilon_0 A_1 = -\varepsilon E_0 - \frac{2\varepsilon}{R^3}B'_1 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A_1 = \frac{-3\varepsilon E_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} \quad , \quad B'_1 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} R^3 E_0$$

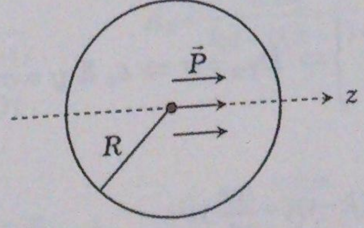
بنابراین φ_{in} برابر است با:

$$\varphi_{in} = \varphi_0 - \frac{3\varepsilon E_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} r\cos\theta = \varphi_0 - \frac{3\varepsilon E_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} z$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{3\varepsilon E_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon}\hat{k} = \frac{3kE_0}{1+2k}$$

۴-۱۹- یک کرهٔ دی‌الکتریک به شعاع R قطبش دائمی برابر $\vec{P}$ دارد که از حیث مقدار و جهت یکنواخت است. این کرهٔ قطبیده، یک میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان را (الف) در داخل و (ب) در خارج کره پیدا کنید. در داخل کره، میدان الکتریکی را که در جهت مخالف قطبش است، میدان واقطبیدگی می‌گویند. [راهنمایی: چون $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ در تمام نقاط صفر است، پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. فرض نکنید که دی‌الکتریک با یک ثابت دی‌الکتریک مشخص می‌شود.]

حل:



با توجه به تقارن سمتی حاکم، پتانسیل با استفاده از هماهنگهای منطقه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{P} = P\hat{k} \Rightarrow \nabla^2\varphi(r,\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

با اعمال شرایط مرزی، می‌توان ضرایب ثابت پتانسیل را بدست آورد:

$$\varphi_{out}(r\to\infty) = 0 \Rightarrow A'_n = 0 \ \forall n$$

physicsclass.blogsky.com

$$\Rightarrow \varphi_{out}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{in}(r\to 0)\not\to\infty \Rightarrow B_n=0 \ \forall n$$

$$\Rightarrow \varphi_{in}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{in}(r=R)=\varphi_{out}(r=R)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n=\sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

و چون P_n (چند جمله‌ایهای لژاندر) مستقل خطی هستند، بنابراین:

$$A_n R^n=B_n R^{-(n+1)} \qquad (1)$$

$$E_{out}=E_{in}=\frac{\sigma\ totul}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r}\bigg|_{r=R}+\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\frac{\sigma_P+\sigma_f}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}=\frac{\vec{P}\cdot\hat{r}_0}{\varepsilon_0}$$

$$=\frac{P\cos\theta}{\varepsilon_0}=\frac{P P_1(\cos\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n A_n R^{n-1} P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)B_n R^{-(n+2)} P_n(\cos\theta)=\frac{P P_1(\cos\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$n=0 \quad A_1+2B_1 R^{-3}=\frac{P}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

$$n\neq 1 \quad n A_n R^{n-1}+(n+1)B_n R^{-(n+2)}=0$$

$$\Rightarrow A_n=B_n=0 \quad n\neq 1 \qquad (3)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \begin{cases} A_1 R=B_1 R^{-2} \\ A_1+\dfrac{2B_1}{R^3}=\dfrac{P}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow A_1=\frac{P}{3\varepsilon_0},\ B_1=\frac{PR^3}{3\varepsilon_0}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=\frac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\theta=\frac{P}{3\varepsilon_0} z$$

$$\varphi_{out}=\frac{PR^3}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{E}_{in}=-\vec{\nabla}\varphi_{in}=\frac{-P}{3\varepsilon_0}\hat{k}=\frac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{out}=-\vec{\nabla}\varphi_{out}=\frac{-\partial\varphi_{out}}{\partial r}\hat{r}_0-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial\theta}\hat{\theta}_0$$

$$=\frac{2PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}\left[(\cos\theta)\hat{r}_0+\frac{\sin\theta}{2}\hat{\theta}_0\right]$$

۴-۲۰- در متن کتاب نشان داده شد که قطبش به صورت $\vec{P}=\rho_0^+(\delta^+-\delta^-)$ است. این رابطه را در مورد کرهٔ مسئلهٔ (۴-۱۹) که به طور یکنواخت قطبیده شده است، به کار ببرید و میدان خارجی دو قطبی را مستقیماً پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که گشتاور دو قطبی در واحد حجم، قطبش نامیده می‌شود، بنابراین:

$$P=\frac{P_d}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow P_d=P\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\vec{P}=\rho_0^+(\delta^+-\delta^-) \quad \Rightarrow \vec{P}_d=q^+(\delta^+-\delta^-)$$

و می‌دانیم که پتانسیل یک دو قطبی برابر است با:

$$\varphi_{out}=\frac{\vec{P}_d\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2}$$

$$E_{out}=-\vec{\nabla}\varphi_{out}=\frac{2PR^3\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3}\hat{r}_0+\frac{PR^3\sin\theta}{3\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta}_0$$

که با پاسخ مسئلهٔ (۴-۱۹) مطابقت دارد.

میراث پدر

پدری نزدیک مرگ به فرزندش گفت که نام و مکنت و هر چیز دیگری که به درد زندگی بخورد برای تو بر جای نگذاشته‌ام، و تنها چیزی که به تو می توانم به میراث بدهم سه قاعده است.

نخست اینکه هرگز از «آنها» نترس، مردمان از «آنها» بیش از هر چیز دراین جهان بیم دارند. سرداران نیرومند شجاعانه با دشمنان سرسخت روبه رو می‌شوند ولی از اینکه «آنها» چه می‌گویند و «آنها» چه می‌اندیشند و «آنها» چه چیز را دوست دارند، سخت می‌هراسند.

قاعده دوم مهمتر است. هرگز در بند جمع‌آوردن چیزهای بیجان مباش. این کار از تو بر نمی‌آید، چه آنها تو را جمع می‌کنند و مالک تو می‌شوند. هر چه بیشتر مالک شوی بیشتر مملوک شده‌ای، و چنین است که من اکنون جز آنچه ضروری است چیزی در اختیار ندارم.

سوم اینکه نخست به خود بخند. در هر کس جنبه خنده آوری وجود دارد و همه چنان دوست دارند که به کس دیگر بخندند. اگر تو خود نخست به خویشتن بخندی، آنگاه چنان می‌شوی که خنده دیگران آزاری به تو نمی‌رساند.

❋ برای آنکس که ایمان دارد، ناممکن وجود ندارد. افراد، برای فرار از رنج تلاش بیشتری می‌کنند تا برای کسب لذت.

آنتونی رابینز

❋ ضعف، فرساینده زندگی است و مقاومت، سازنده آن. هر گاه سختی‌ها و مشکلات شما را از تلاش باز داشتند کمی اندیشه کنید و از خود بپرسید آیا این خاصیت کودکی من نیست که همه چیز را حاضر و آماده می‌خواهد.

تامس هریس

❋ از لمس کردن، از احساس کردن و از ابزار احساسات خود نهراسیم. راحت‌ترین کار دنیا این است که آنچه هستیم باشیم و آنچه را که احساس می‌کنیم نشان دهیم. به جای زندگی در گذشته‌ها در اکنون زندگی کن. وقتی غذا می‌خوری، غذا بخور،

Physicsclass.blogsky.com

۵

نظریهٔ میکروسکوپی دی‌الکتریک‌ها

میدان مولکولی در دی‌الکتریها

عبارت است از میدان الکتریکی در محل هر یک از مولکولها در دی‌الکتریک و این میدان از همهٔ چشمه‌های خارجی و همهٔ مولکولهای قطبیده در دی‌الکتریک، به استثنای مولکولی که در نقطهٔ مورد مطالعه قرار دارد، ناشی می‌شود. در واقع مولکول به میدان اعمال شدهٔ $\vec{E}$ و همچنین به خود قطبش (یعنی، میدان‌های دو قطبی تمامی‌مولکولهای دیگر) بستگی دارد.

در ساده‌ترین موارد

$$\vec{E}_m=\vec{E}+\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (۵-۱)$$

در حالت عادی $\vec{E}_m$ را می‌توان از این معادلات حذف کرد و نوشت:

$$\vec{P}=\chi\vec{E} \qquad (۵-۲)$$

که در آن χ پذیرفتاری ثابت و برابر است با:

$$\chi=\frac{N\alpha}{1-\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}} \qquad (۵-۳)$$

اما هنگامی‌که قطبش‌پذیری مولکولها زیاد باشد ($N\alpha>3\varepsilon_0$)، پاسخ دیگری با $\vec{E}=0$ و $\vec{P}\neq 0$ امکان‌پذیر است. (یعنی، ممکن است موقعی که میدان اعمال شده صفر است، ماده مثل جسم فروالکتریک، به طور خود به خود قطبیده شود).

قطبش ماکروسکوپی $\vec{P}$ هر مادهٔ دی‌الکتریک همسانگرد به گشتاور دو قطبی مولکولی P_m که در پاسخ به میدان الکتریکی موضعی در مکان مولکول (یعنی میدان مولکول E_m) بوجود می‌آید، بستگی دارد.

$$\vec{P}=N\vec{P}_m \qquad (۵-۴)$$

معمولاً $\vec{P}_m$ با تقریب خوبی با $\vec{E}_m$ متناسب است:

$$\vec{P}_m=\alpha\vec{E}_m \qquad (۵-۵)$$

که α قطبش‌پذیری مولکولی است.

دو قطبیهای القایی، یک مدل ساده

مولکولهای دی‌الکتریکها را در دو گروه قطبی و غیرقطبی رده‌بندی می‌کنند. مولکول قطبی آن است که حتی در غیاب میدان قطبندهٔ $\vec{E}_m$، یک گشتاور دو قطبی دائمی‌داشته باشد. در مولکولهای غیرقطبی گرانیگاههای توزیع بارهای مثبت و منفی به طور عادی بر یکدیگر منطبق‌اند، اعمال میدان الکتریکی بر دی‌الکتریک سبب جابه‌جایی نسبی بارهای مثبت و منفی در مولکول‌های غیر قطبی می‌شود و دو قطبی‌های مولکولی که بدین نحو پدید می‌آیند، به دو قطبیهای القایی موسوم هستند. در میدان الکتریکی ناشی از تغییر شکل توزیع بار الکترونی، تمام مولکولها گشتاور دو قطبی القایی پیدا می‌کنند. از تحلیل یک مدل خطی ساده، قطبش‌پذیری اتمی ثابتی نتیجه می‌شود که با حجم اتم متناسب است.

$$\alpha_0=4\pi\varepsilon_0 R_0^3 \qquad (۵-۶)$$

این قطبش‌پذیری ثابت و مستقل از میدان قطبیده است و دی‌الکتریکی که بدین‌گونه توصیف شود، خطی است.

مولکولهای قطبی (فرمول لانژون ـ دبی)

در اثنای تشکیل مولکول، ممکن است برخی از الکترونهای یک اتم به طور کامل یا به طور جزئی به اتم دیگر منتقل شوند و پس از این انتقال آرایش الکترونی حاصل به نحوی باشد که مراکز بارهای مثبت و منفی در مولکول برهم منطبق نباشد. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، یک قطعهٔ ماکروسکوپی از دی‌الکتریک قطبی قطبیده نخواهد بود، زیرا سمتگیری تک‌تک دو قطبیها کاتوره‌ای است. ولی اگر دی‌الکتریک قطبی تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار گیرد، برهر یک از دو قطبیهای آن گشتاور نیرویی وارد می‌شود و گرایش این گشتاورها چنان است که می‌خواهند دو قطبیها را با میدان همسو کنند. اگر میدان به اندازهٔ کافی قوی باشد، ممکن است دو قطبیها کاملاً همسو شوند که در آن صورت قطبش به مقدار اشباع خود خواهد رسید:

$$\vec{P}_s=N\vec{P}_m \qquad (۵-۷)$$

N تعداد مولکولها در واحد حجم است.

فقدان همسویی کامل دو قطبیها ناشی از انرژی گرمایی مولکولهاست که در جهت ایجاد سمتگیریهایی کاتوره‌ای برای دو قطبیها عمل می‌کنند.

physicsclass.blogsky.com

گشتاور دو قطبی مؤثر یک دو قطبی مولکولی عبارت است از مؤلفهٔ آن در امتداد میدان ($P_\circ \cos\theta$)، با استفاده از رابطهٔ بولتزمن، مقدار میانگین این کمیت به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\langle P_\circ \cos\theta \rangle = P_\circ \left[\coth y - \frac{۱}{y} \right] \quad , \quad y = \frac{P_\circ E_m}{kT} \qquad (۵-۸)$$

که به فرمول لانژون معروف است.

گشتاور دو قطبی مولکولی $P_\circ$ برای اکثر مواد قطبی طوری است که به ازای همهٔ مقادیر شدت میدان، حتی به ازای شدتهای که نزدیک به استقامت دی‌الکتریک ماده‌اند، تا زمانی که دما بالاتر از $۲۵۰k$ باشد، داریم $y \ll ۱$- بنابراین هر مادهٔ دی‌الکتریکی که شامل مولکولهای قطبی باشد، عموماً خطی است، و به همین دلیل با بسط $\coth y$ به صورت سری نمایی نتیجه می‌شود که:

$$\langle P_\circ \cos\theta \rangle \approx \frac{P_\circ^۲ E_m}{۳kT} \qquad (۵-۹)$$

چون $\langle P_\circ \cos\theta \rangle$ میانگین گشتاور دو قطبی مؤثر هر مولکول است، بنابراین قطبش مساوی با $P = N \langle P_\circ \cos\theta \rangle$ و در جهت E_m خواهد بود.

$$\frac{۱}{N} P = \frac{P_\circ^۲ E_m}{۳kT} \qquad (۵-۱۰)$$

و بنابراین قطبش‌پذیری α (یعنی گشتاور دو قطبی مولکولی در واحد میدان قطبنده)، برابر است با:

$$\alpha = \frac{P_\circ^۲}{۳kt} \qquad (۵-۱۱)$$

که در واقع α قطبش‌پذیری سمتگیری است. بنابراین قطبش‌پذیری مولکولی کلی برابر است با:

$$\alpha = \alpha_\circ + \frac{P_\circ^۲}{۳kT} \qquad (۵-۱۲)$$

که $\alpha_\circ$، قطبش‌پذیری تغییر شکل است که ناشی از اثرات دو قطبی‌های القایی است.

مسائل فصل پنجم

۵-۱- (الف) با به کار بردن معادلهٔ کلاریوس - موساتی، قطبش‌پذیری اتمها را در مولکولهای هوا (یعنی $N_۲$ و $O_۲$) محاسبه کنید. [توجه کنید که از معادلهٔ (۵-۱۰) فقط میانگین وزنی قطبش‌پذیریهای نیتروژن و اکسیژن به دست می‌آید]. (ب) از ترکیب این نتیجه و نظریهٔ بخش ۵-۲ شعاع متوسط اتمها را در یک مولکول هوا محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\alpha = \frac{۳\varepsilon(k-۱)}{N(k+۲)} \quad \text{(معادلهٔ کلاوسیوس - موساتی)}$$

هوا:

$$\begin{cases} k = ۱/۰۰۰۵۹ \\ PV = nRT \xrightarrow{\text{شرایط استاندارد}} ۱/۰۱۳\times۱۰^۵ = (\frac{n}{V})(۸/۳۱۴)(۲۷۳) \\ \Rightarrow \frac{n}{V} = ۴۴/۶۳ \ (\frac{\text{مول}}{m^۳}) \\ \Rightarrow N = (\frac{n}{V}) N_\circ = ۴۴/۶۳ \times ۶/۰۲\times۱۰^{۲۳} = ۲/۶۸\times۱۰^{۲۵} (\frac{\text{مولکول}}{m^۳}) \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha\ (\text{مولکول‌های هوا}) = ۲\alpha\ (\text{اتم‌ها})$$

$$= \frac{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ (۱/۰۰۰۵۹-۱)}{۲/۷\times۱۰^{۲۵}\ (۱/۰۰۰۵۹+۲)} = ۱/۹۴\times۱۰^{-۴۰}$$

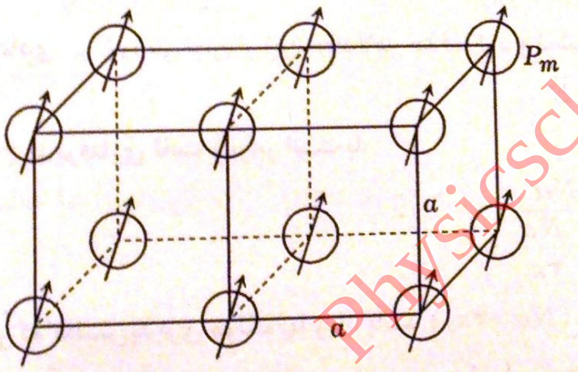
$$\Rightarrow \alpha\ (\text{اتم‌ها}) = ۹/۷\times۱۰^{-۴۱}$$

(ب)

$$\alpha = ۴\pi\varepsilon_\circ R_\circ^۳$$

$$\Rightarrow R_\circ = (\frac{\alpha}{۴\pi\varepsilon_\circ})^{\frac{۱}{۳}} = (\frac{۹/۷\times۱۰^{-۴۱}}{۴\pi\varepsilon_\circ})^{\frac{۱}{۳}} = ۹/۵۵\times۱۰^{۱۱}\ (m)$$

۵-۲- شکل ۵-۷ شبکهٔ مکعبی ساده‌ای از مولکولها را نشان می‌دهد که تمام مولکولهای آن گشتاور دو قطبی P_m یکسانی (از حیث جهت و مقدار) دارند. مولکول معینی را در نظر می‌گیریم و آن را j می‌نامیم. واضح است که نزدیک‌ترین همسایه‌های j شش مولکول‌اند که در فاصلهٔ a واقع‌اند، نزدیک‌ترین همسایه‌های بعدی آن دوازده مولکول در فاصلهٔ $\sqrt{۲a}$ و به همین ترتیب.



شکل ۵ - ۷ قسمتی از آرایهٔ مکعبی سادهٔ مولکول‌ها که گشتاور دوقطبی هر یک P_m است.

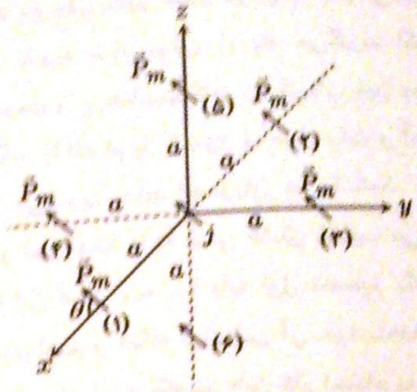
میدان الکتریکی ناشی از شش P_m مولکولهای نزدیک‌ترین همسایه‌ها را به ازای جهتی دلخواه برای P_m در محل j به دست آورید. (خطوطی که j را به نزدیک‌ترین همسایه‌هایش متصل می‌کنند، محورهای x، y و z اختیار کنید. برای سهولت P_m را در صفحهٔ xz بگیرید به طوری که با محور x زاویهٔ θ بسازد).

حل: میدان برآیند شش دو قطبی در محل j امین دو قطبی برابر است با:

$$\vec{E}_j = \sum_{i=۱}^{۶} \vec{E}_i \ , \ \vec{E}_i = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۳(\vec{r}-\vec{r}_i').\vec{P}_m}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^۵}(\vec{r}-\vec{r}_i') - \frac{\vec{P}_m}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^۳} \right]$$

$\vec{E}_i$ میدان حاصل از دو قطبی i ام است.

Physicsclass.blogsky.com



با توجه به شکل داریم:

$$\vec P_m = P_m \cos\theta\,\hat i + P_m \sin\theta\,\hat k \qquad , \qquad \vec r = 0$$

$$\vec r_1 = a\hat i \quad , \quad \vec r_2 = -a\hat i$$

$$\Rightarrow \vec E_2 = \vec E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(-a\hat i).\vec P_m}{a^5}(-a\hat i) - \frac{\vec P_m}{a^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3P_m\cos\theta}{a^3}\hat i - \frac{\vec P_m}{a^3}\right]$$

$$\vec r_3 = a\hat j \Rightarrow \vec r_4 = -a\hat j \Rightarrow \vec E_4 = \vec E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[0 - \frac{\vec P_m}{a^3}\right] = \frac{-\vec P_m}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$\vec r_5 = a\hat k \quad , \quad \vec R_6 = -a\hat k$$

$$\Rightarrow \vec E_6 = \vec E_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(-a\hat k).\vec P_m}{a^5}(-a\hat k) - \frac{\vec P_m}{a^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3P_m\sin\theta}{a^3}\hat k - \frac{\vec P_m}{a^3}\right]$$

$$\vec E_j = \sum_{i=1}^{6} E_i = 2E_1 + 2E_3 + 2E_5$$

$$= \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3P_m\cos\theta}{a^3}\hat i + \frac{3P_m\sin\theta}{a^3}\hat k - \frac{3\vec P_m}{a^3}\right]$$

$$= \frac{6}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[P_m\cos\theta\,\hat i + P_m\sin\theta\,\hat k - \vec P_m\right] = 0$$

۵-۳- (الف) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۵-۱ برای قطبش‌پذیری اتم نیتروژن، جابه‌جایی هستهٔ نیتروژن را نسبت به ابر الکترونی آن در میدانی به شدت $E_m = 3\times10^6\ V/m$ محاسبه کنید. (ب) این جابه‌جایی را با شعاع اتم که در مسئلهٔ ۵-۱ به دست آمد، مقایسه کنید.

حل: الف)

$$\alpha_N = 9/7\times10^{-41} : \text{مسئله } (۱-۵)$$

$$P_m = Zex = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_m = \alpha E_m$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha E_m}{Ze} = \frac{9/7\times10^{-41}\times3\times10^6}{7\times(1/6\times10^{-19})} = 2/6\times10^{-16}\ (m)$$

ب)

$$\begin{cases} R_0 = 9/55\times10^{-11}\ (m) \\ x = 2/6\times10^{-16}\ \ (m) \end{cases} \Rightarrow x \ll R_0$$

۵-۴- (الف) با استفاده از بسط سری معروف e^y، عبارت $\coth y$ را بسط دهید و معادلهٔ (۵-۲۲ الف) را از معادلهٔ (۵-۲۱) به دست آورید. (ب) یک مرحلهٔ بیشتر جلو بروید و جملهٔ دیگری از سری معادلهٔ (۵-۲۲ الف) را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\langle P_0\cos\theta\rangle = P_0\left[\coth y - \frac{1}{y}\right] \qquad (۲۱-۵)$$

$$\coth y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(2n+1)}}{(2n+1)!}} = \frac{1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4!}+\dots}{y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\dots} = \frac{1}{y}+\frac{y}{3}+\dots$$

$$\Rightarrow \langle P_0\cos\theta\rangle = P_0\left[\frac{1}{y}+\frac{y}{3}-\frac{1}{y}\right] \simeq \frac{P_0 y}{3}$$

ب) با انجام یک مرحله بیشتر تقسیم می‌توان جملهٔ دیگری برای $\coth y$ بدست آورد، بنابراین:

$$\coth y = \frac{1}{y}+\frac{y}{3}-\frac{y^3}{45}+\dots$$

$$\langle P_0\cos\theta\rangle = P_0\left[\frac{1}{y}+\frac{y}{3}-\frac{y^3}{45}-\frac{1}{y}\right] \simeq \frac{P_0 y}{3} - \frac{P_0 y^3}{45}$$

$$y = \frac{P_0 E_m}{KT} \Rightarrow \langle P_0\cos\theta\rangle \simeq \frac{P_0^2 E_m}{3KT} - \frac{P_0^4 E_m^3}{45K^3T^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{p_0^2}{3KT} - \frac{P_0^4 E_m^2}{45K^3T^3}$$

۵-۵- آب مولکولی قطبی است که برای آن معادلهٔ کلازیوس-موساتی به درستی قابل کاربرد نیست. با وجود این، فرض کنید که این معادله در مورد آب صادق است و p_0 را برای مولکول آب محاسبه کنید.

حل:

$$\alpha = \frac{P_0^2}{3KT} : \text{مولکول‌های قطبی} \quad , \quad \alpha = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 \Rightarrow P_0^2 = 12\pi\varepsilon_0 KTR_0^3$$

$R_0\,H_2O = 1/84\times10^{-10}\ (m)$, $K = 1/38\times10^{-23}$ (ثابت بولتزمن) و

$T = 300^\circ K$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$P_0^2 = 12\pi\varepsilon_0(1/38\times10^{-23})\times300\times(1/84\times10^{-10})^3 = 8/60\times10^{-60}$$

$$\Rightarrow P_0 = 2/93\times10^{-30}\ (c.m)$$

Physicsclass.blogsky.com

۶

انرژی الکتروستاتیکی

انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای

انرژی الکتروستاتیکی گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آنها نسبت به حالتی است که همه بارهای نقطه‌ای از یکدیگر بی‌نهایت دورند. به آسانی می‌توان این انرژی را با محاسبه مقدار کار لازم برای گرد هم آوردن بارها بدست آورد، بنابراین:

(۶-۱)

$$W_1=0 \quad , \quad W_2=\frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} \quad \rightarrow U=\sum_{j=1}^{m} W_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}\right)$$

و با در نظر گرفتن اینکه $W_{jk}=W_{kj}$, $W_{jj}=0$، واضح است که می‌توانیم U را به صورت متقارن‌تر بنویسیم:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} W_{jk} \qquad (W_{jj}=0) \qquad (۶-۲)$$

و با توجه به مقدار پتانسیل ϕ در محل j امین بار نقطه‌ای ناشی از سایر بارهای دستگاه، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه عبارت است از:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} q_j\varphi_j \qquad (۶-۳)$$

این معادله نسبتاً اعتبار عمومی دارد، این معادله در مورد گروهی از بارهای نقطه‌ای که در محیط‌های دی الکتریکی مختلفی قرار گرفته‌اند و حتی در مورد رساناهای با ابعاد متناهی نیز صادق است. تنها محدودیت در اعتبار این معادله این است که تمام دی الکتریکی‌ها در دستگاه الکتریکی باید خطی باشند.

انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار

انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه با چگالی حجمی ρ و چگالی سطحی σ، که شامل رساناهاست، به صورت زیر است:

$$U=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV+\frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\, da+\frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \qquad (۶-۴)$$

جمع بندی آخر بر روی تمام رساناهاست و انتگرال سطحی به سطوح نارسانا منحصر است.

چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را می‌توان با یک تبدیل ریاضی (انتگرال‌گیری جزء به جزء) به نحو دیگری بیان کرد:

$$U=\frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\, dV \qquad (۶-۵)$$

که در آن انتگرال بر روی جمعی از دستگاه گرفته می‌شود که خارج از رساناها واقع است، یعنی بر روی دی‌الکتریکهای مختلف موجود در دستگاه، ولی چون میدان الکتریکی $\vec{E}$ در داخل رساناها صفر است، می‌توان انتگرال‌گیری را به تمامی فضا گسترش داد.

علاوه بر این، معادلهٔ مذکور مشخص می‌کند که انرژی باید با چگالی $\frac{1}{2}\vec{D}.\vec{E}$ در واحد حجم توزیع شده باشد، در واقع چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیکی به صورت زیر است:

$$u=\frac{1}{2}\vec{D}.\vec{E} \qquad (۶-۶)$$

چون معادله (۶-۵) را برای دی‌الکتریکهای خطی به دست آورده‌ایم، هر دی‌الکتریک با یک گذردهی ثابت ε مشخص می‌شود، و نیز بحث ما فقط به دی‌الکتریکهای همسانگرد محدود است، بنابراین:

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} \qquad (۶-۷)$$

هنگامی که این فرمول‌بندی برای بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود، «خود انرژی» نامتناهی آنها باید تفریق شود.

انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل.

در دستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هر یک از رساناها با معادله زیر داده می‌شود:

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{N} P_{ij}Q_j \qquad (۶-۸)$$

این معادله هم برای N رسانا در خلاء صادق است و هم وقتی دی‌الکتریک‌هایی نیز در دستگاه حضورداشته باشند، مشروط برآنکه این دی‌الکتریک‌ها خطی و بدون بار خارجی باشند، صادق است.

Physicsclass.blogsky.com

ضریب P_{ij}، آن قسمت از پتانسیل iامین رساناست که از وجود بار واحد بر روی رسانای jام ناشی می‌شود، را ضریب پتانسیل می‌نامند.

بنابراین انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از N رسانای باردار به صورت زیر است:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}P_{ij}Q_iQ_j \qquad (۶-۹)$$

در واقع انرژی تابع درجه دومی از بارهای رساناهای مختلف است.

نکته: سه حکم کلی و مهم را می‌توان در مورد ضرایب P_{ij} بیان کرد:

(۱) $P_{ij}=P_{ji}$، (۲) همه P_{ij} ها مثبت‌اند، (۳) j هر چه باشد $P_{ii}\geq P_{ij}$

ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

معادله (۶-۸)، دستگاهی از N معادله خطی است که پتانسیل رساناها را برحسب بارهایشان به دست می‌دهد. این دستگاه معادلات را می‌توان برای تعیین بارهای Q_i(با وارونه کردن ماتریس) حل کرد:

$$Q_i=\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\varphi_j \qquad (۶-۱۰)$$

که در آن C_{ii} ضریب ظرفیت و $C_{ij}(i\neq j)$ضریب القا نامیده می‌شود، و خواص آنها به صورت زیر است:

(۱) $C_{ij}=C_{ji}$، (۲) $C_{jj}>0$، (۳) ضرایب القا صفر و یا منفی‌اند.

با ترکیب این معادله با معادله (۶-۳)، انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\varphi_i\varphi_j \qquad (۶-۱۱)$$

خازن‌ها

دو رسانا که بتوانند بارهای مساوی و مخالف ($\pm Q$) را در خود ذخیره کنند و اختلاف پتانسیل بین آنها به باردار بودن سایر رساناهای دستگاه بستگی نداشته باشد (پتانسیلی که بارهای دیگر در هریک از رساناهای این زوج رسانا ایجاد می‌کنند، باید یکسان باشد) وسیله‌ای را تشکیل می‌دهند که می‌تواند انرژی الکتروستاتیکی را در خود ذخیره کند، که خازن نامیده می‌شود.

ظرفیت خازن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C=\frac{Q}{\Delta\phi} \qquad (۶-۱۲)$$

در دستگاه mks، ظرفیت خازن برحسب کولن بر ولت و یا فاراد ($1F=1\frac{C}{V}$) سنجیده می‌شود.

انرژی یک خازن باردار به صورت زیر است:

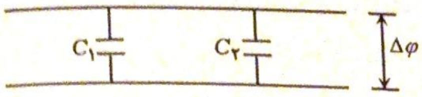
$$U=\frac{1}{2}Q\Delta\varphi=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (۶-۱۳)$$

ظرفیت خازنی تشکیل شده از دو صفحه موازی که مساحت هر یک A است و اختلاف پتانسیل آنها برابر $\Delta\varphi=Ed$ است، برابر است با:

$$C=\frac{\varepsilon A}{d}$$

دو یا چند خازن را می‌توان به همدیگر متصل کرد:

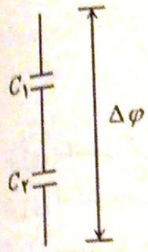
۱- روش موازی



در مورد این اتصال، همان ولتاژ $\Delta\varphi$ که در دو سر هر یک از خازن‌ها وجود دارد، در دو سرخازن معادل نیز موجود است، بنابراین ظرفیت خازن معادل به صورت زیر است:

$$C=C_1+C_2$$

۲- روش متوالی



در صورتیکه دو خازن بدون بار به طور متوالی به یکدیگر بسته و سپس باردار شوند، پایستگی بار ایجاب می‌کند که هر یک از خازنها بار یکسانی به دست آورند، بنابراین ظرفیت خازن معادل برابر است با:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

نیروها و گشتاور نیروها

نیروی الکتریکی و گشتاور نیروی الکتریکی وارد بر قسمتی از یک دستگاه منزوی که هر رسانای آن باری ثابت دارد برابر است با منفی گرادیان انرژی الکتروستاتیکی

$$F_x=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \quad , \quad \tau_1=-\left(\frac{\partial U}{\partial\theta_1}\right)_Q$$

در صورتیکه دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض پتانسیل هر رسانا به وسیله یک عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شده باشد، نیرو و گشتاور نیرو به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$F_x=+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\varphi \quad , \quad \tau_1=\left(\frac{\partial U}{\partial\theta_1}\right)_\varphi$$

مسائل فصل ششم

۶-۱ - یک الکترون سریع ($5\times10^{-17}J$ = انرژی جنبشی) به فضایی وارد می‌شود که دارای میدان الکتریکی یکنواخت $E=800V/m$ است. میدان موازی راستای حرکت الکترون و در جهتی است که حرکت آن را کند می‌کند. الکترون قبل از آنکه به حال سکون درآید چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ ($1/60\times10^{-19}c$ = بارالکترون)

حل: با توجه به قضیه کار و انرژی:

$$W=\Delta E_k$$

$$\vec{F}=-e\vec{E}\rightarrow -e\vec{E}.\vec{x}=0-E_k\rightarrow eEx=E_k\rightarrow x=\frac{E_k}{eE}$$

$$x=\frac{5\times10^{-17}}{1/6\times10^{-19}\times800}=0/391(m)$$

Physicsclass.blogsky.com

۶-۲ - یک پوسته دی‌الکتریک کروی (به شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و ثابت دی‌الکتریک k) و یک بار نقطه‌ای q به فاصله بی‌نهایت از یکدیگر قرار دارند. بارنقطه‌ای را به مرکز پوسته دی‌الکتریک منتقل می‌کنیم. تغییر انرژی دستگاه را محاسبه کنید.

حل:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_2 \qquad U_1 = 0$$

چون در ابتدا فاصله بین بار و پوسته دی‌الکتریک بی‌نهایت است، بنابراین انرژی کل دستگاه، U_1، برابر صفر است.

$$\Delta U = U_2 = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$$

بنابراین باید $\vec{E}$ و $\vec{D}$ را در سه ناحیه $r<a$ ، $a<r<b$ و $r>b$ بدست آوریم:

$$r<a: \quad \oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = q \;\rightarrow\; \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$a<r<b: \quad \oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = q \;\rightarrow\; D 4\pi r^2 = q$$

$$\rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi(k\varepsilon_0)r^2}\hat{r} \quad (\varepsilon = k\varepsilon_0)$$

$$r>b: \quad \oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = q \;\rightarrow\; \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

بنابراین تغییر انرژی دستگاه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta U = U_2 = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV = \frac{1}{2}\Bigg[\int_0^a \varepsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2 dr$$

$$+ \int_a^b (k\varepsilon_0)\frac{q^2}{(4\pi)^2(k\varepsilon_0)^2 r^4}4\pi r^2 dr + \int_b^\infty \frac{\varepsilon_0 q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2 dr\Bigg]$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^a \frac{dr}{r^2} + \int_a^b \frac{dr}{kr^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}\right]$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\Big|_0^a - \frac{1}{kr}\Big|_a^b - \frac{1}{r}\Big|_b^\infty\right]$$

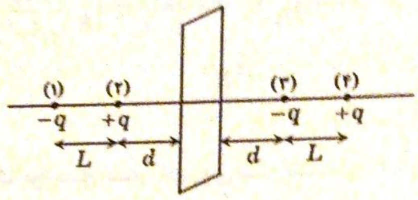
انتگرال اول به ازای حد پائین انتگرال (صفر)، بینهایت می‌شود، در واقع این خود انرژی نامتناهی بار نقطه‌ای است که آن را از جواب کنار می‌گذاریم:

$$\Delta U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{a} - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{b}\right] = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(b-a)(1-k)}{kab}\right]$$

۶-۳ دو قطبی ql، عمود بر صفحه‌ای رسانا قرار گرفته است به طوری که بار $-q$ در فاصله d و بار $+q$ در فاصله $d+l$ از صفحه واقع است. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه بار را محاسبه کنید. [راهنمایی: انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی به علاوه بارهای تصویری

در خلاء را در نظر بگیرید. بارهای تصویری را طوری انتخاب کنید که میدان E ی درست را در جلوی صفحه تولید کنند.]

حل:



انرژی دستگاه برابر با انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی و بارهای تصویری در خلاء است.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{J=1}^{4} q_j\varphi_j \quad , \quad \varphi_j = \sum_{k=1}^{4}{}' \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}$$

پریم به منزله $k \neq j$ است، بنابراین:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(L+2d)} + \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L+2d)}$$

$$+ \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d+L)} + \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

$$= \frac{-2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{L} - \frac{1}{(L+2d)} + \frac{1}{4d} + \frac{1}{4(L+d)}\right]$$

۶-۴ - یک پوسته کروی باردار به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ_0 مفروض است. خود انرژی این توزیع را به دو روش محاسبه کنید:

(الف) با انتگرال‌گیری مستقیم از معادله (۶-۸)

(ب) با انتگرال‌گیری بر روی میدان، $\frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv$

حل: (الف) معادله (۶-۸):

$$U = \frac{1}{2}\int_s \sigma\varphi\, da$$

و پتانسیل پوسته برابر است با:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{(\text{پوسته کروی})} \sigma_0 \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0} da = \frac{\sigma_0^2 R}{2\varepsilon_0}\int da$$

$$= \frac{\sigma_0^2 4\pi R^3}{2\varepsilon_0} = \frac{2\pi\sigma_0^2 R^3}{\varepsilon_0}$$

ب)

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2\, dV$$

و میدان الکتریکی برای دو ناحیه $r>R$ ، $r<R$ برابر است با:

$$r<R: \; E = 0$$

$$r>R: \; \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; E 4\pi r^2$$

Physicsclass.blogsky.com

$$= \frac{\sigma_0 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^R E^2 dV + \int_R^\infty E^2 dV\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \frac{\sigma_0^2 R^4}{\varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi\sigma_0^2 R^4}{\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{2\pi\sigma_0^2 R^3}{\varepsilon_0}$$

۵-۶ - یک توزیع بار کروی به شعاع R و چگالی بار یکنواخت ρ_0 مفروض است. خود انرژی توزیع را به دو روش محاسبه کنید:

(الف) با انتگرال گیری مستقیم از معادله (۶-۸).

(ب) با انتگرال گیری بر روی میدان $\frac{1}{2}\int \vec{E}.\vec{D}dv$

حل: (الف) با توجه به تقارن مسئله φ فقط تابعی از r است، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi_{in} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{-\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r^3 + A_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r + \frac{A_1}{r^2} \rightarrow \varphi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{A_1}{r} + A_2$$

$$\nabla^2\varphi_{out} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \varphi_{out} = \frac{A'_1}{r} + A'_2$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases}\varphi_{in} = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{A_1}{r} + A_2 & r=0 \rightarrow q=0 \rightarrow A_1 = 0\\ \varphi_{out} = \frac{A'_1}{r} + A'_2 & \varphi_{out}(r\rightarrow\infty) = 0 \rightarrow A'_2 = 0\end{cases}$$

$$\varphi_{in}(r=R) = \varphi_{out}(r=R) \rightarrow -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 + A_2 = \frac{A'_1}{R}$$

برای بدست آوردن A'_1 از قانون گاوس استفاده می کنیم:

$$\vec{E}_{out} = -\vec{\nabla}\varphi_{out} = -\frac{A'_1}{r^2}\hat{r}$$

$$\oint\vec{E}_{out}.\hat{n}da = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{A'_1}{r^2}4\pi r^2 = \frac{\rho_0\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow A'_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{-\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 + A_2 = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} \rightarrow A_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

بنابراین پتانسیل برای $r<R$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\varphi_{in} = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \rightarrow U = \frac{1}{2}\int\rho\varphi dV$$

$$= \frac{1}{2}\int\rho_0\left[\frac{-\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\right]4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{\rho_0^2\pi}{\varepsilon_0}\int_0^R\left(\frac{-r^4}{3} + R^2r^2\right)dr = \frac{\rho_0^2\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{-r^5}{15} + \frac{R^2r^3}{3}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho_0^2\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{-R^5}{15} + \frac{R^5}{3}\right] = \frac{4\rho_0^2\pi R^5}{15\varepsilon_0}$$

(ب)

$$\oint E_{in}.da = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{in}4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow E_{in} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

$$\oint E_{out}.da = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{out}4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow E_{out} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$U = \frac{1}{2}\int\vec{E}.\vec{D}dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_0^R E_{in}^2 dV + \int_R^\infty E_{out}^2 dV\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^R\frac{\rho_0^2 r^2}{9\varepsilon_0^2}4\pi r^2 dr + \int_R^\infty\frac{\rho_0^2 R^6}{9\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2 dr\right] = \frac{4\rho_0^2\pi R^5}{15\varepsilon_0}$$

۶-۶ - فرض کنید الکترون یک ذره کروی با بار یکنواخت به شعاع R باشد. باز هم فرض کنید که انرژی سکون mc^2 (m جرم سکون الکترون و c سرعت نور است) منشاء الکتروستاتیکی دارد و با نتیجه مسئله ۶-۵ برابر است. با قرار دادن مقادیر عددی مناسب برای بار و جرم الکترون، شعاع کلاسیک الکترون، یعنی R را محاسبه کنید.

حل: از مسئله ۵ داریم:

$$U = \frac{4\pi R^5\rho_0^2}{15\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} mc^2 = U \\ \rho_0 = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

و با قرار دادن مقادیر عددی زیر:

$$\left.\begin{array}{l} mc^2 = 0/51MeV = 8/16\times10^{-14}j \\ e = 1/6\times10^{-19}C \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\end{array}\right\} \Rightarrow R = 1/69\times10^{-15}m$$

۷-۶ - دو بار نقطه‌ای q_1, q_2 به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. اگر میدان‌های مربوط به آنها در نقطه r به ترتیب E_1, E_2 باشند، در آن صورت

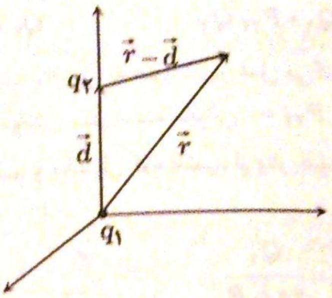
$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1.\vec{E}_2$$

(الف) نشان دهید که انتگرالهای E_1^2, E_2^2 بر تمامی فضا دیورژانس هستند. این همان «خود انرژی» نامتناهی است که باید از انرژی U کاسته شود.

Physicsclass.blogsky.com

(ب) انتگرالی برای سهم مربوط به $2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2$ در U بنویسید و نشان دهید که این انتگرال دیورژانس نیست.

حل: الف)



$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\Rightarrow E_1^2=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{q_1^2}{r^4}$$

$$\int E_1^2\,dv=\frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^4}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec r-\vec d|^2}\Rightarrow E_2^2=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{q_2^2}{|\vec r-\vec d|^4}$$

$$=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{q_2^2}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2}$$

$$\int E_2\,dV=\frac{q_2^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2\pi q_2^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2}$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u=r^2+d^2-2rd\cos\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$u=r^2+d^2-2rd\cos\theta\rightarrow du=+2rd\sin\theta\,d\theta$$

$$\rightarrow\sin\theta\,d\theta=\frac{du}{2rd}$$

$$\int E_2\,dV=\frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\int\frac{r^2\,dr\,du}{2rd\,u^2}$$

$$=\frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\frac{rdr}{2d}\left(\frac{-1}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{q_2^2}{16\pi d\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}rdr\left[\frac{1}{(r^2+d^2-2rd)}-\frac{1}{(r^2+d^2+2rd)}\right]$$

$$=\frac{q_2^2}{16\pi d\varepsilon_0^2}\left(\int_0^{\infty}\frac{r\,dr}{(r-d)^2}-\int_0^{\infty}\frac{r\,dr}{(r+d)^2}\right)=\infty$$

ب)

$$\int\vec E_1\cdot\vec E_2\,dV=\qquad E_1=-\vec\nabla\varphi_1$$

$$\int\vec E_1\cdot\vec E_2\,dV=-\int\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec E_2\,dV$$

$$\vec\nabla\cdot(\varphi_1\vec E_2)=\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec E_2+\varphi_1\vec\nabla\cdot\vec E_2$$

$$-\int\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec E_2\,dV=-\int\vec\nabla\cdot(\varphi_1\vec E_2)\,dV+\int\varphi_1\vec\nabla\cdot\vec E_2\,dV$$

$$\vec\nabla\cdot\vec D_2=\rho_2\Rightarrow\varepsilon_0\vec\nabla\cdot\vec E_2=\rho_2$$

$$-\int\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec E_2\,dV=-\oint\varphi_1\vec E_2\cdot da+\frac{1}{\varepsilon_0}\int\varphi_1\rho_2\,dV$$

S، کره‌ای به شعاع بینهایت است که بر روی این کره پتانسیل φ_1 صفر است بنابراین انتگرال سطحی صفر می‌شود.

$$-\int\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec E_2\,dV=+\frac{1}{\varepsilon_0}\int\varphi_1\rho_2\,dV$$

چون q_1، ρ_2 صفر نیستند بنابراین این انتگرال یک انتگرال معین و همگراست.

۶-۸- (الف) ظرفیت خازنی که می‌تواند $1000J$ را در $1000V$ ذخیره کند، چقدر است؟

(ب) فرض کنید که خازن صفحاتی موازی و به فاصله $10^{-5}m$ از یکدیگر دارد و با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ۲ پرشده است. مساحت مورد نیاز صفحات چقدر است؟

حل: الف)

$$U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2\Rightarrow 1000J=\frac{1}{2}C(1000)^2\Rightarrow C=0/002F$$

ب)

$$C=\varepsilon\frac{A}{d}\ ,\quad \varepsilon=k\varepsilon_0=2\varepsilon_0\Rightarrow 0/002=2\varepsilon_0\frac{A}{10^{-5}}\Rightarrow$$

$$A=\frac{2\times10^{-3}\times10^{-5}}{2\times8/85\times10^{-12}}=0/113\times10^{4}\,m^2$$

۶-۹- دستگاه برق ساز (الکتروفورز) از صفحهٔ مدور تختی از موم و صفحهٔ مشابهی از فلز که دسته‌ای از جنس عایق دارد تشکیل شده است. به صفحهٔ مومین، از طریق مالش آن با پارچهٔ پشمی یا پوست، بار مقید Q داده می‌شود. پس صفحهٔ فلزی روی صفحهٔ مومین قرار داده می‌شود و موقتاً به زمین متصل می‌شود تا بار $-Q$ را بدست آورد. صفحهٔ فلزی سرانجام از صفحهٔ مومین جدا می‌شود و در عین حال بار $(-Q)$ خود را حفظ می‌کند. فرض کنید که شعاع صفحات $10cm$ و $Q=0/3\mu c$ و فاصلهٔ اولیهٔ دو صفحه $10^{-5}m$ باشد. اختلاف پتانسیل بین صفحات و انرژی ذخیره شده را هنگامی که فاصله بین دو صفحه (الف) $d=10^{-5}m$ و (ب) $d=0/02m$ است، پیدا کنید.

حل: الف)

$$\left.\begin{aligned}c&=\varepsilon_0\frac{A}{d}\\A&=\pi r^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=\varepsilon_0\frac{\pi r^2}{d}=8/85\times10^{-12}\frac{\pi\times(0/1)^2}{10^{-5}}$$

$$=2/78\times10^{-8}\qquad F=2/8\times10^{-2}\mu F$$

$$\Delta\varphi=\frac{Q}{C}=\frac{0/3\mu c}{2/8\times10^{-2}\mu F}=10/71(V)$$

$$\Rightarrow U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=1/6\times10^{-6}(J)=1/6(\mu J)$$

ب)

$$C'=\varepsilon_0\frac{\pi r^2}{d'}=8/85\times10^{-12}\frac{\pi\times(0/1)^2}{0/02}=13/9\times10^{-12}(F)$$

physicsclass.blogsky.com

$$\Delta\varphi=\frac{Q}{C}=\frac{۰/۳\times۱۰^{-۶}}{۱۳/۹\times۱۰^{-۱۲}}=۲/۲\times۱۰^{۴}\ (V)$$

$$\Rightarrow U=\frac{۱}{۲}C(\Delta\varphi)^{۲}=۳/۴\times۱۰^{-۳}\ (j)=۳/۴(mj)$$

۶-۱۰ - دستگاهی متشکل است از تنها دو رسانا. ضرایب ظرفیت و القا را صریحاً بر حسب ضرایب پتانسیل P_{ij} به دست آورید.

حل: با استفاده از روش ماتریسی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_i=\sum_{j=1}^{۲}P_{ij}Q_j \rightarrow \varphi=PQ\\ Q_i=\sum_{j=1}^{۲}C_{ij}\varphi_j \rightarrow Q=C\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow C=P^{-1} \qquad (۱)$$

$$P=\begin{bmatrix}P_{۱۱} & P_{۱۲}\\ P_{۲۱} & P_{۲۲}\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{۱}{\det P}\begin{bmatrix}P_{۲۲} & -P_{۱۲}\\ -P_{۲۱} & P_{۱۱}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱}}\begin{bmatrix}P_{۲۲} & -P_{۱۲}\\ -P_{۲۱} & P_{۱۱}\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

از (۱), (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$C_{۱۱}=\frac{-P_{۲۲}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}$$

$$C_{۱۲}=\frac{-P_{۱۲}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}$$

$$C_{۲۱}=\frac{-P_{۲۱}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}$$

$$C_{۲۲}=\frac{P_{۱۱}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}$$

همچنین می‌توان این ضرایب را به صورت زیر بدست آورید:

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{۲}P_{ij}.Q_j\Rightarrow\begin{cases}\varphi_۱=P_{۱۱}Q_۱+P_{۱۲}Q_۲\\ \varphi_۲=P_{۲۱}Q_۱+P_{۲۲}Q_۲\end{cases} \qquad (۱)$$

$$Q_i=\sum_{j=1}^{۲}C_{ij}\varphi_j\Rightarrow\begin{cases}Q_۱=C_{۱۱}\varphi_۱+C_{۱۲}\varphi_۲\\ Q_۲=C_{۲۱}\varphi_۱+C_{۲۲}\varphi_۲\end{cases} \qquad (۲)$$

معادلات (۱) را برای $Q_۲, Q_۱$ حل می‌کنیم و با مقایسه با معادلات (۲)، ضرایب Cها به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$Q_۱=\frac{P_{۲۲}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}\varphi_۱+\frac{-P_{۱۲}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}\varphi_۲$$

$$Q_۲=\frac{-P_{۲۱}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}\varphi_۱+\frac{P_{۱۱}}{(P_{۱۱}P_{۲۲}-P_{۱۲}P_{۲۱})}\varphi_۲$$

۶-۱۱ - دو رسانای کروی در خلاء قرار دارند. رسانای ۱ به شعاع R به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است) رسانای ۲ به قدری کوچک است که می‌توان آن را یک بار نقطه‌ای تصورکرد. بار این رسانا q است و به فاصله d از کره متصل به زمین قرار دارد. چه مقدار بار روی کره متصل به زمین القا می‌شود؟ (از مفهوم ضرایب پتانسیل استفاده کنید.)

حل:

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{N}P_{ij}Q_j\Rightarrow$$

بار القا شده روی کره $=Q_۱$

بارنقطه‌ای $=Q_۲$

$$\begin{cases}\varphi_۱=P_{۱۱}Q_۱+P_{۱۲}Q_۲\\ \varphi_۲=P_{۲۱}Q_۱+P_{۲۲}Q_۲\end{cases}$$

برای مشخص کردن ضرایب پتانسیل به صورت زیر عمل می‌کنیم:
پتانسیل بار نقطه‌ای روی خودش صفر است، بنابراین $P_{۲۲}=۰$
بار $Q_۲$ را صفر قرار می‌دهیم و پتانسیل کره ناشی از بار خودش $Q_۱$ صفر نیست، بنابراین:

$$\varphi_۱=P_{۱۱}Q_۱=\frac{Q_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$$

$$\varphi_۲=P_{۲۱}Q_۱=\frac{Q_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ d}$$ (پتانسیل حاصل از بار $Q_۱$ در نقطه $Q_۲$)

$$\Rightarrow P_{۱۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$$

$$P_{۱۲}=P_{۲۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ d}$$

پتانسیل کره صفر است، بنابراین:

$$\varphi_۱=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ R}Q_۱+\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ d}Q_۲=\circ\Rightarrow Q_۱=-\frac{R}{d}Q_۲$$

۶-۱۲ - دستگاهی مرکب از دو جسم رسانا را در نظر بگیرید که در یک محیط دی‌الکتریک خطی قرار دارد. رسانای ۱ بار ندارد و رسانای ۲ به زمین متصل است. ثابت کنید پتانسیل رسانای ۱ نیز با پتانسیل زمین برابر است.

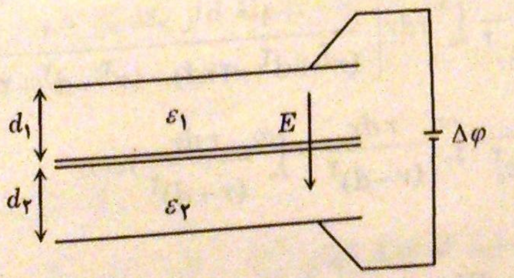
حل: طبق فرض مسئله: $q_۱=\circ$, $\varphi_۲=\circ$ بنابراین:

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{۲}P_{ij}.q_j\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\varphi_۱=p_{۱۱}q_۱+p_{۱۲}q_۲=p_{۱۲}q_۲ & (۱)\\ \varphi_۲=p_{۲۱}q_۱+p_{۲۲}q_۲=\circ,\ p_{۲۲}\neq\circ\Rightarrow q_۲=\circ & (۲)\end{cases}$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\varphi_۱=\circ$$

۶-۱۳ - خازنی با صفحات موازی با یک دی‌الکتریک مرکب ساخته شده است. ورقه‌ای از یک دی‌الکتریک با گذردهی $\varepsilon_۱$ و ضخامت $d_۱$ در بالای ورقه دی‌الکتریک دیگری با گذردهی $\varepsilon_۲$ و ضخامت $d_۲$ قرار داده شده است. ترکیب این دو دی‌الکتریک بین دو صفحه موازی رسانا قرار گرفته است که فاصله آنها از یکدیگر $d_۱+d_۲$ است ظرفیت خازن را در واحد سطح صفحات آن به دست آورید.



حل:

$$\Delta\varphi=-\int\vec{E}.d\vec{l}\Rightarrow\Delta\varphi=E_۱d_۱+E_۲d_۲ \qquad (۱)$$

از قانون گاؤس و سطح گاؤسی مکعبی داریم:

Physicsclass.blogsky.com

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}=Q \Rightarrow DA=Q \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 E_1 A=Q \Rightarrow E_1=\frac{Q}{\varepsilon_1 A} \\ \varepsilon_2 E_2 A=Q \Rightarrow E_2=\frac{Q}{\varepsilon_2 A}\end{cases} \quad (2)$$

از ترکیب روابط (۱)،(۲)، $\Delta\varphi$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\varphi=\frac{Q}{\varepsilon_1 A}d_1+\frac{Q}{\varepsilon_2 A}d_2$$

بنابراین ظرفیت خازن در واحد سطح:

$$\frac{C}{A}=\frac{Q}{A\Delta\varphi}=\frac{Q}{A\left[\frac{Q}{\varepsilon_1 A}d_1+\frac{Q}{\varepsilon_2 A}d_2\right]}=\frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}$$

۶-۱۴ – استوانه‌ای طویل و رسانا به شعاع a به موازات یک صفحه رسانای نامتناهی و به فاصله h از آن قرار دارد. نشان دهید که ظرفیت دستگاه در واحد طول استوانه با رابطه زیر داده می‌شود.

$$C=2\pi\varepsilon_0/\cosh^{-1}(h/a)$$

(به بخش (۳-۱۰) رجوع شود.)

حل: با توجه به مسئله (۳-۲۱) داریم:

$$\underset{(x_0\to h)}{M}=\frac{h\pm\sqrt{h^2-a^2}}{a} \quad M<1$$

$$\varphi_M=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln M=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{h-\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{h}{a}-\sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2-1}\right)$$

$$\cos^{-1}hx=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$$

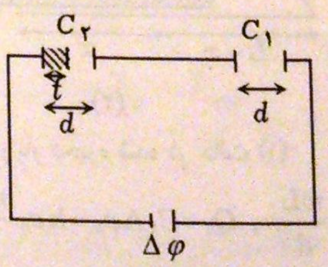
$$\varphi_M=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$C=\frac{Q}{|\Delta Q|}=\frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)}$$

$$\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)}$$

۶-۱۵ – دو خازن مشابه را که بین صفحات آنها هواست، به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم و ترکیب حاصل را در اختلاف پتانسیل ثابت ۵۰V نگه می‌داریم. اگر یک ورقه دی‌الکتریک را که ثابت دی‌الکتریک آن ۱۰ و ضخامتش یک دهم فاصله صفحات است، در داخل یکی از خازنها قرار دهیم، اختلاف پتانسیل دوسراین خازن را محاسبه کنید.

حل:



خازن C_2، متشکل از دوخازن متوالی است بنابراین ظرفیت خازن آن برابر است با:

$$C_1'=\varepsilon_0\frac{A}{(d-t)} \ , \ C_2'=\varepsilon\frac{A}{t} \Rightarrow C_2=\frac{C_1'C_2'}{C_1'+C_2'}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\frac{A^2}{t(d-t)}}{\varepsilon_0\frac{A}{d-t}+\varepsilon\frac{A}{t}}=\frac{k\varepsilon_0 A}{t+k(d-t)} \quad (1)$$

همچنین خازنهای C_1, C_2 با یکدیگر متوالی هستند. بنابراین ظرفیت خازن معادل آنها برابر است با:

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\left(\varepsilon_0\frac{A}{d}\right)\times\left(\frac{k\varepsilon_0 A}{t+k(d-t)}\right)}{\left(\varepsilon_0\frac{A}{d}\right)+\left(\frac{k\varepsilon_0 A}{t+(d-t)k}\right)}=\frac{k\varepsilon_0 A}{t(1-k)+2dk} \quad (2)$$

دو خازن C_1, C_2 با یکدیگر متوالی هستند بنابراین:

$$Q_1=Q_2=Q_{\text{کل}} \Rightarrow Q_2=Q_{\text{کل}} \Rightarrow C_2\Delta\varphi_2=C\Delta\varphi \quad (3)$$

با جایگذاری روابط (۱)،(۲) در رابطه (۳) داریم:

$$\frac{k\varepsilon_0 A}{t+k(d-t)}\Delta\varphi_2=\frac{k\varepsilon_0 A}{2kd+(1-k)t}\Delta\varphi \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_2=\frac{kd+(1-k)t}{2kd+(1-k)t}\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi=50V \ , \ t=\frac{d}{10} \ , \ k=10$$

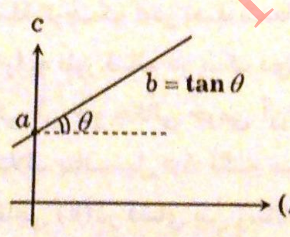
$$\Delta\varphi_2=\frac{10d-0/9d}{20d-0/9d}50=\frac{9/1}{19/1}50=23/82 \ (V)$$

۶-۱۶ – ظرفیت یک الکتروسکوپ با برگه طلا کاملاً ثابت نیست، زیرا وقتی $\Delta\varphi$ افزایش یابد، برگه به طرف محفظه نزدیک‌تر می‌شود. ظرفیت مورد نظررا می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C=a+b(\Delta\varphi)^2$$

چگونه می‌توانید ثابت‌های a,b را برای یک دستگاه بخصوص تعیین کنید؟ هنگامی که الکتروسکوپ باردار است، انرژی آن چقدر است؟ آیا این انرژی تماماً الکتریکی است؟

حل: الف) می‌توان به الکتروسکوپ بارهای متفاوت داد و $C, \Delta\varphi$ را محاسبه کرد و با ترسیم نمودار C برحسب $(\Delta\varphi)^2$، a,b به ترتیب عرض از مبداء و شیب نمودار حاصل هستند.



ب)
$$U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}\left[a+b(\Delta\varphi)^2\right](\Delta\varphi)^2$$
$$=\frac{1}{2}a(\Delta\varphi)^2+\frac{1}{2}b(\Delta\varphi)^4$$

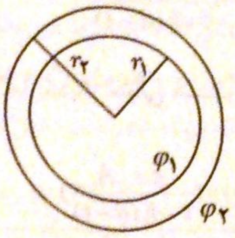
ج) انرژی تماماً الکتریکی نیست، زیرا مقداری از انرژی مربوط به گشتاور است.

۶-۱۷ – دو پوستهٔ رسانای کروی هم مرکز به شعاع‌های r_1, r_2 را به ترتیب در پتانسیل‌های φ_1, φ_2 نگه داشته‌ایم فضای بین دو پوسته را

Physicsclass.blogsky.com

از یک ماده دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. با محاسبه مستقیم نشان دهید که انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریک برابر است با $C(\varphi_1-\varphi_2)^2/2$ و در نتیجه C یا ظرفیت دستگاه را تعیین کنید.

حل:



$$\int \vec{D}.d\vec{a}=Q \Rightarrow D4\pi r^2=Q \Rightarrow D=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$U=\frac{1}{2}\int \vec{E}.\vec{D}dV=\frac{1}{2\varepsilon}\int D^2\,dV$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{Q^2}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{Q^2}{4\pi}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]=\frac{Q}{2}\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r_1}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon r_2}\right]$$

$$=\frac{Q}{2}\left[\varphi_1-\varphi_2\right] \qquad (1)$$

$$Q=C(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (2)$$

از روابط (۱)،(۲) داریم:

$$U=\frac{1}{2}C(\varphi_1-\varphi_2)^2 \qquad (3)$$

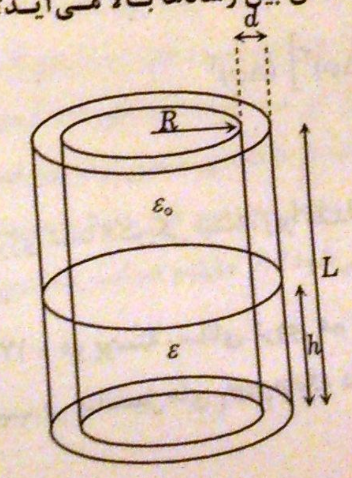
از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$U=\frac{1}{2}C(\varphi_1-\varphi_2)^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}\frac{C^2(\varphi_1-\varphi_2)^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]\Rightarrow C=\frac{4\pi\varepsilon}{\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]}$$

۶-۱۸ - دو رسانای استوانه‌ای هم محور که شعاع آنها تقریباً یکی است، به اندازهٔ فاصلهٔ کوچک d در بعد شعاعی از یکدیگر جدا هستند. استوانه‌ها را به طور قائم در یک دی‌الکتریک مایع که پذیرفتاری الکتریکی آن χ و چگالی جرمی آن ξ است، فرو می‌بریم. استوانه‌ها را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم. مایع دی‌الکتریک تا چه ارتفاعی (h) در فضای بین رساناها بالا می‌آید؟ (از کشش سطحی صرفنظر کنید)

حل:



با توجه به اینکه شعاع استوانه‌ها تقریباً یکسان هست، می‌توانیم خازن‌ها را به صورت تخت در نظر بگیریم، بنابراین ظرفیت معادل برابر است با:

$$C=C_1+C_2=\varepsilon\frac{2\pi Rh}{d}+\frac{\varepsilon_0 2\pi R(L-h)}{d}$$

انرژی الکتروستاتیکی خازن برابر است با:

$$U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon 2\pi Rh}{d}+\frac{\varepsilon_0 2\pi R(L-h)}{d}\right](\Delta\varphi)^2$$

مایع تا جایی بالا می‌آید که نیروی الکتریکی با نیروی وزن قسمت بالا آمده برابر شود، بنابراین:

$$F_E=\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_\varphi=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon 2\pi R}{d}-\frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d}\right](\Delta\varphi)^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2\pi R}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)(\Delta\varphi)^2=\frac{\pi R}{d}\chi(\Delta\varphi)^2$$

$$F_g=\xi(2\pi Rhd)g$$

$$F_E=F_g \Rightarrow \frac{\pi R}{d}\chi(\Delta\varphi)^2=\xi(2\pi Rhd)g \Rightarrow$$

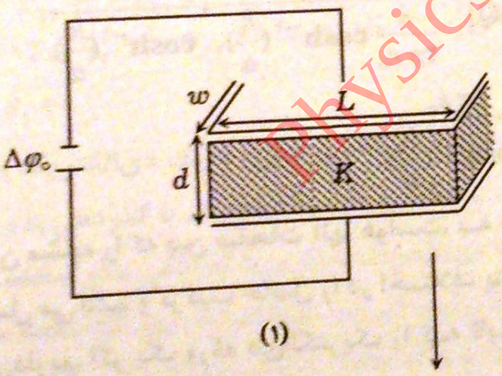
$$h=\frac{\chi}{2\xi g}\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2$$

۶-۱۹ - فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی به وسیلهٔ برهٔ دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک k پر شده است. ابعاد صفحهٔ خازن عبارت‌اند از عرض w و طول L و فاصله صفحات d. خازن را در حالی که به منبعی با اختلاف پتانسیل $(\Delta\varphi_0)$ متصل است باردار و سپس آن را از منبع جدا می‌کنیم. حال قسمتی از برهٔ دی‌الکتریک را در امتداد بعد L بیرون می‌کشیم به طوری که فقط طول x از آن در داخل خازن باقی بماند.

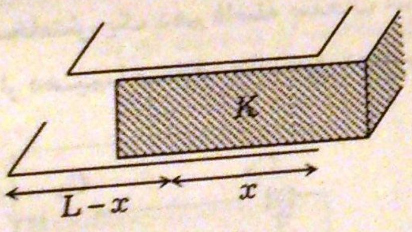
(الف) اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن چقدر است؟

(ب) نیرویی که می‌خواهد برهٔ دی‌الکتریک را دوباره به داخل خازن بکشد چقدر است؟

حل:



(۱)



(۲)

الف) ظرفیت خازن و مقدار بار ذخیره شده در حالت (۱):

$$C_1=\varepsilon\frac{A}{d}=k\varepsilon_0\frac{wL}{d}\;,\;Q_1=C_1\Delta\varphi_0=k\varepsilon_0\frac{wL}{d}\Delta\varphi_0$$

در حالت (۲):

Physicsclass.blogsky.com

$$Q_2=Q_1\ ,\quad C_2=C'_1+C'_2=\varepsilon_0\frac{w(L-x)}{d}+k\varepsilon_0\frac{wx}{d}$$

$$\Delta\varphi_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_1}{C_2}=\frac{k\varepsilon_0\frac{wL}{d}\Delta\varphi_0}{\varepsilon_0\frac{w(L-x)}{d}+k\varepsilon_0\frac{wx}{d}}=\frac{kL\Delta\varphi_0}{kx+(L-x)}$$

ب)

$$U=\frac{1}{2}C_2(\Delta\varphi_2)^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 w}{d}\left[(L-x)+kx\right]\left[\frac{kL\Delta\varphi_0}{kx+(L-x)}\right]^2$$

$$=\frac{\varepsilon_0 w}{2d}\frac{k^2L^2\Delta\varphi_0^2}{(k-1)x+L}=\frac{Q_1^2 d}{2\varepsilon_0 w}\left[(k-1)x+L\right]^{-1}$$

$$F_x=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q=\frac{Q_1^2 d}{2\varepsilon_0 w}\frac{(k-1)}{\left[(k-1)x+L\right]^2}$$

۶-۲۰ - ظرفیت یک خازن متغیر که بین صفحات آن هواست، هنگامی که یکی از صفحات آن از ۰° تا ۱۸۰° بچرخد به طور خطی از ۵۰pf تا ۳۶۴pF تغییر می‌کند صفحه چرخان را در زاویه ۷۵° تنظیم کرده و دو سر خازن را در اختلاف پتانسیل برابر با ۴۰۰ ولت نگه می‌داریم. جهت و اندازه گشتاور نیروی الکتروستاتیکی وارد بر صفحه خازن را پیدا کنید.

حل: ظرفیت خازن با زاویه به طور خطی تغییر می‌کند بنابراین:

$$C-50=\frac{364-50}{180-0}(\theta-0)\Rightarrow C=\frac{314}{180}\theta+50$$

$$U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{314}{180}\theta+50\right)(400)^2$$

$$\tau=\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)_\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{314}{180}\right)(400)^2=139555/6$$

گشتاور نیروی الکتروستاتیکی در جهت افزایش θ است.

۶-۲۱ - یک پوستهٔ رسانای کروی، بدون بار به جرم m، ودر یک دی‌الکتریک مایع با ثابت دی‌الکتریک K شناور است، به طوری که یک چهارم حجم آن در مایع غوطه‌وراست. تا چه پتانسیلی باید کره را باردار کنیم تا نیمی از حجم آن غوطه‌ور شود؟ (راهنمایی: فرض کنید میدان الکتریکی پوسته باردار که تا نیمه غوطه‌وراست، یک میدان شعاعی خالص باشد و بعداً نشان دهید که جمع $\sigma+\sigma p$ روی سطح کره به گونه‌ای است که فرض بالا را تایید می‌کند.)

حل:

اگر ρ چگالی جرمی مایع و V حجم کره باشد داریم:

$$F_A=\rho\left(\frac{1}{4}V\right)=mg\Rightarrow\rho V=4mg \qquad (1)$$

$$F'_A=\rho\left(\frac{1}{2}V\right)\xrightarrow{(1)}F'_A=2mg$$

$$F'_A=F_E+F_{mg}=2_{mg}\Rightarrow F_E=F_{mg} \qquad (2)$$

$$\vec{F}_E=\frac{1}{2}\oint\sigma\vec{E}da \qquad (3)$$

در رابطه (۳) $\vec{E},\sigma=\sigma_{free}$ میدان در نزدیکی سطح کره رساناست و $\vec{E}=E_r\hat{r}_0$ لذا باید داشته باشیم:

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{free}=\varepsilon_2E_{2n}-\varepsilon_1E_{1n}=\sigma_{free}$$

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma_{total}}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{free}+\sigma_{potal}}{\varepsilon_0}$$

پوسته رساناست و میدان در درون رسانا صفر است.

$$\varepsilon_2E_{2n}=\sigma_f\Rightarrow\begin{cases}E_{2r}=\dfrac{\sigma_f}{\varepsilon_0} & \text{در سطح نیمکره بالایی}\\[2mm] E_{2r}=\dfrac{\sigma_f}{\varepsilon_0} & \text{در سطح نیمکره پایینی}\end{cases} \qquad (4)$$

$$(3),(4)\Rightarrow\vec{F}_E=\frac{1}{2}\oint_{\text{نیمکره بالایی}}\frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_0}\hat{r}_0da+\frac{1}{2}\oint_{\text{نیمکره پایینی}}\frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_0}\hat{r}_0da$$

$$\hat{r}_0=\sin\theta\cos\phi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}+\cos\theta\hat{k}$$

دوجمله اول صفر می شوند بعلت تقارن سمتی پس داریم:

$$\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi=\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi=0$$

$$F_E=\frac{k}{2}\oint_{up}\frac{\sigma_p^2}{\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta d\phi R^2+\frac{k}{2}\oint_{up}\frac{\sigma_p^2}{\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta d\theta\phi R^2 \qquad (5)$$

σ_p از θ نیز مستقل است.

$$\oint_{up}\rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin d\theta=\frac{1}{2}$$

$$\oint_{down}\rightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\sin d\theta=\frac{1}{2} \qquad (6)$$

$$5,6\Rightarrow\vec{F}_E=\frac{\hat{k}R^2 2\pi}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f)^2_{up}-\frac{1}{\varepsilon}(\sigma_f)^2_{down}\right\}$$

حال σ_f ها را محاسبه می کنیم.

$$\nabla^2\phi=0\Rightarrow\phi=A+\frac{B}{r}$$

$$r\rightarrow\infty\Rightarrow\phi=0\Rightarrow A=0\qquad \phi\Big|_{r=R}=\frac{B}{R}=\phi_0\Rightarrow B=\phi_0R$$

$$\Rightarrow\phi=\frac{\phi_0R}{r}\Rightarrow\vec{E}=-\nabla\phi\Rightarrow E=\frac{\phi_0R}{r^2}r_0\Rightarrow Er=\frac{\phi_0R}{r^2}$$

$$\begin{cases}(\sigma_f)_{up}=\varepsilon_0Er\big|_{r=R}=\varepsilon_0\dfrac{\phi_0}{R}\\[2mm](\sigma_f)_{down}=\varepsilon Er\big|_{r=R}=\varepsilon_0\dfrac{\phi_0}{R}=k\varepsilon_0\dfrac{\phi_0}{R}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_E=\frac{\hat{k}2\pi R^2}{\varepsilon}\left(\frac{\phi_0}{R}\right)^2\varepsilon_0(1-k)$$

$$=\frac{k2\pi\varepsilon_0}{\varepsilon}\phi_0^2(1-k) \qquad (7)$$

$$(2),(7)\Rightarrow\vec{F}_E=m\vec{g}=\frac{k2\pi\varepsilon_0\phi_0^2(1-k)}{\varepsilon}$$

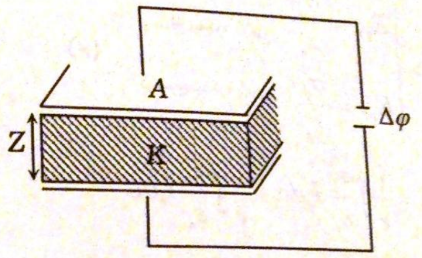
$$g=-gk\Rightarrow\phi_0=\left[\frac{+4mg}{2\pi\varepsilon_0(-1+k)}\right]^{+\frac{1}{2}}$$

۶-۲۲ - یک تیغه دی‌الکتریک به ضخامت d و ثابت دی‌الکتریک k فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی را پرکرده است. مساحت صفحه خازن A است. نیروی الکتروستاتیکی وارد بر یکی از صفحات را برای دو مورد زیر محاسبه کنید: (الف) با فرض اینکه دی‌الکتریک

Physicsclass.blogsky.com

مستقیماً با آن صفحه در تماس باشد و (ب) با فرض اینکه بین دی‌الکتریک و آن صفحه شکاف باریکی از هوا وجود داشته باشد. در هر دو مورد صفحات را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم.

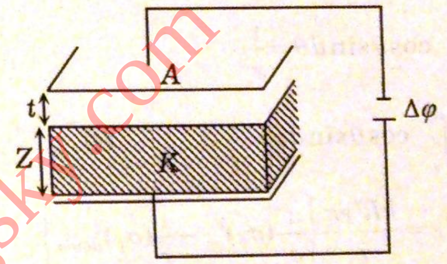
حل: الف)



$$C=\varepsilon\frac{A}{Z}=k\varepsilon_0\frac{A}{Z}\quad,\quad U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}k\varepsilon_0\frac{A}{Z}(\Delta\varphi)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}F_Z=(\frac{\partial V}{\partial Z})_\varphi=\frac{-k\varepsilon_0 A(\Delta\varphi)^2}{2Z^2}\\ C^2=k^2\varepsilon_0^2\frac{A^2}{Z^2}\Rightarrow Z^2=\frac{k^2\varepsilon_0^2A^2}{C^2}\end{array}\right\}\Rightarrow F_Z=\frac{-1}{2}\frac{C^2\Delta\varphi^2}{kA\varepsilon_0}$$

ب)



با توجه به شکل، خازن تشکیل شده از دو خازن که به صورت سری اتصال پیدا کرده‌اند:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\\ C_1=\varepsilon_0\frac{A}{t}\\ C_2=k\varepsilon_0\frac{A}{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

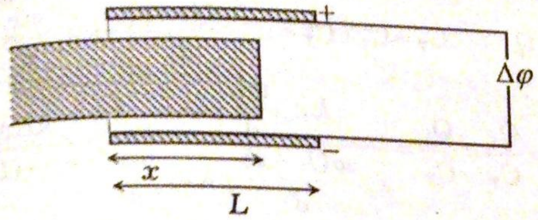
$$C=\frac{\frac{k\varepsilon_0^2A^2}{Zt}}{k\varepsilon_0\frac{A}{Z}+\varepsilon_0\frac{A}{t}}=\frac{k\varepsilon_0A}{kt+Z}$$

$$\left.\begin{array}{l}U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2\\ F_Z=(\frac{\partial U}{\partial Z})_\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow F_Z=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2(\frac{\partial C}{\partial Z})$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\frac{-k\varepsilon_0A}{(kt+Z)^2}$$

۲۳-۶ – مثال مربوط به شکل ۶-۴ را با انرژی الکتروستاتیکی به صورت $U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2$ حل کنید، در اینجا $C=C(x)$ ظرفیت خازن است هنگامی که قطعه دی‌الکتریک تا فاصله x فرورفته است.

حل:



با توجه به شکل، خازن متشکل از دو خازن است که با یکدیگر اتصال موازی دارند. بنابراین:

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0w(L-x)}{d}+\frac{k\varepsilon_0wx}{d}$$

$$\left.\begin{array}{l}U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2\\ F_x=(\frac{\partial U}{\partial x})_\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow F_x=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\frac{\partial C}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\left[\frac{k\varepsilon_0w}{d}-\frac{\varepsilon_0w}{d}\right]=\frac{1}{2}\frac{w(\Delta\varphi)^2}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

۲۴-۶ – فرض کنید انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی $U=\frac{1}{2}Q\Delta\varphi$ است که در آن $Q=C\Delta\varphi$ ظرفیت را به صورت $C=C(x)$ که به پارامتر هندسی x بستگی دارد، در نظر بگیرید. در اینجا پارامتر x مکان قسمتی از دستگاه را مشخص می‌کند. نشان دهید که نیروی وارد بر آن قسمت برای مقدار بخصوصی از $Q,\Delta\varphi$ طبق معادله (۶-۳۳الف) با Qی ثابت با نیروی وارد بر آن طبق معادله (۶-۴۱) با $\Delta\varphi$ی ثابت یکسان است.

حل:

$$U=\frac{1}{2}Q\Delta\varphi\ ,\ Q=C\Delta\varphi\Rightarrow U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

$$F_x=-(\frac{\partial U}{\partial x})_Q=-\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{C(x)})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\frac{\partial C}{\partial x}\qquad(1)$$

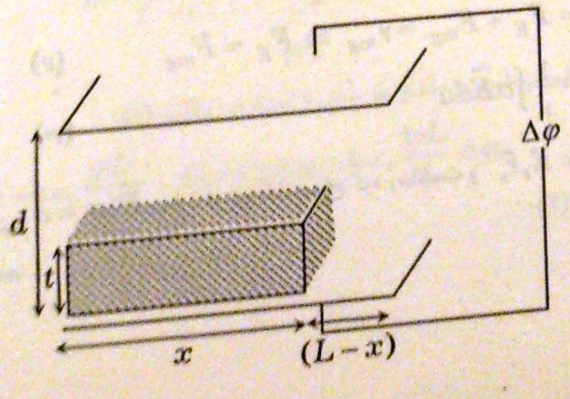
$$U=\frac{1}{2}Q\Delta\varphi\ ,\ Q=C\Delta\varphi\Rightarrow U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}C(x)(\Delta\varphi)^2$$

$$F_x=(\frac{\partial U}{\partial x})_\varphi=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\frac{\partial C}{\partial x}\qquad(2)$$

بنابراین روابط (۱)،(۲) با یکدیگر برابر هستند.

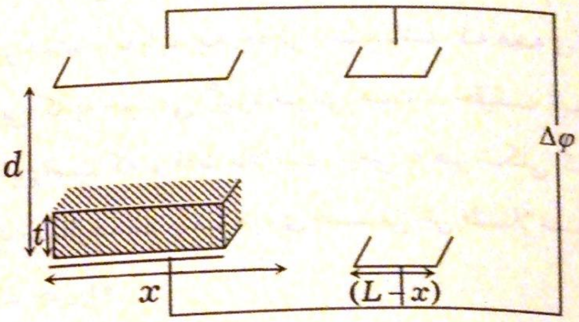
۲۵-۶ – مثال مربوط به شکل ۶-۴ را چنانچه ضخامت tی بره دی‌الکتریک از فاصله dی بین صفحات بسیار کمتر باشد حل کنید. (راهنمایی: در این حالت، بنابر نتیجه مسئله ۴-۱۵، D در تمامی فضای بین صفحات تقریباً یکسان است، نه E.)

حل:



Physicsclass.blogsky.com

با توجه به شکل، خازن متشکل از دو خازن C_2, C_1 است که با هم به صورت موازی متصل شده‌اند:



$$C_{totol}=C_1+C_2 \qquad C_1=\varepsilon_0\frac{w(L-x)}{d}$$

با توجه به شکل خازن C_2 نیز تشکیل شده از دو خازن C'_2 و C'_1 که به یکدیگر سری شده‌اند، بنابراین:

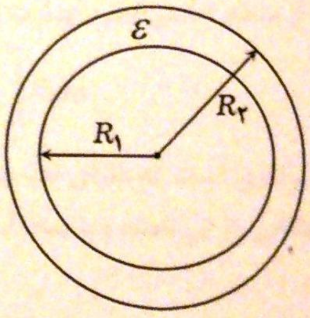
$$\left.\begin{aligned}&C_2=\frac{C'_1C'_2}{C'_1+C'_2}\\&C'_1=\varepsilon_0\frac{wx}{(d-t)},\ C'_2=k\varepsilon_0\frac{wx}{t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_2=\frac{k\varepsilon_0 wx}{kd+(1-k)t}$$

$$C_{total}=C_1+C_2=\varepsilon_0\frac{w(L-x)}{d}+\frac{k\varepsilon_0 wx}{kd+(1-k)t}$$

$$U=\frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_0 w(L-x)}{d}+\frac{k\varepsilon_0 wx}{kd+(1-k)t}\right](\Delta\varphi)^2$$

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2\varepsilon_0 w\left[\frac{-1}{d}+\frac{k}{kd+(1-k)t}\right]$$

۶-۲۶- سیم استوانه‌ای طویلی به شعاع R_1، توسط یک پوستهٔ استوانه‌ای بلند به شعاع R_2 $(R_2>R_1)$ به طور هم محور احاطه شده است. این دو رسانا "صفحاتِ" یک خازن را تشکیل می‌دهند و فضای بین آنها توسط مادهٔ نارسانایی با گذردهی ε پُر شده است. (الف) ظرفیت در واحد طول این خازن را به دست آورید. (ب) نشان دهید که این نتیجه تنها به نسبت R_2/R_1 بستگی دارد.



حل: الف) با محاسبهٔ انرژی کل موجود در حجم محبوس بین دو استوانه و مقایسهٔ آن با $U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$، ظریف خازن را بدست می‌آوریم:

$$\oint \vec{E}.\hat{n}da=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E(2\pi rl)=\frac{\lambda l}{\varepsilon}\Rightarrow \vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{r}_0$$

$$U=\frac{1}{2}\int\vec{E}.\vec{D}dv=\frac{1}{2}\varepsilon\int E^2dv$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\right)^2 r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\right)^2(2\pi l)\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{(\lambda l)^2}{C}$$

$$\Rightarrow C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\Rightarrow\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

۶-۲۷- حداکثر بار Q که یک خازن می‌تواند ذخیره کند، هم توسط ظرفیت خازن و هم توسط استقامت دی‌الکتریک مادهٔ دی‌الکتریک، یعنی E_{max} (به جدول ۴-۱ رجوع شود) تعیین می‌شود. (الف) Q_{max} را برحسب ε و E_{max} برای خازنی با صفحات موازی تعیین کنید. (ب) کدام دی‌الکتریک، اکسید آلومینیم یا شیشه، بار بیشتری در خازنی با صفحات موازی و مساحت صفحات یکسان، ذخیره می‌کنند؟

حل: الف)

$$\left.\begin{aligned}&Q_{max}=C\Delta\varphi_{max}\\&\Delta\varphi_{max}=dE_{max}\\&C=\varepsilon\frac{A}{d}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}Q_{max}&=C(dE_{max})\\&=\left(\frac{\varepsilon A}{d}\right)(dE_{max})=\varepsilon AE_{max}\end{aligned}\qquad (1)$$

ب) حداکثر میدان الکتریکی که یک دی‌الکتریک می‌تواند تحمل کند بی‌آنکه در هم بشکنند، استقامت دی‌الکتریک نامیده می‌شود. از رابطهٔ (۱) مشخص است که هرچه E_{max} برای مادهٔ دی‌الکتریک بیشتر باشد توانایی ذخیرهٔ بار بیشتری به خازن می‌دهد. طبق جدول (۴-۱) داریم:

شیشه : $E_{max}=9\times10^6$

اکسید آلومینیم : $E_{max}=6\times10^6$

با توجه به مطالب بالا، شیشه E_{max} بزرگتری دارد، بنابراین توانایی ذخیرهٔ بار بیشتری به خازن می‌دهد.

۶-۲۸- (الف) با استفاده از روش گشتاورها که در بخش ۳-۱۲ توضیح داده شده، ظرفیت خازنی با صفحات مربعی را محاسبه کنید. حداقل آرایه‌های ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ را انجام دهید. (ب) نتایج را با ظرفیت به دست آمده از تقریب صفحهٔ نامتناهی مقایسه کنید.

حل: صورت سؤال غلط و حل این مسأله از روش خواسته شده ممکن نیست.

physicsclass.blogsky.com